

EDP paraboliques pour la dynamique des populations

Thomas Giletti

A propos

Ce document est un support du cours du Master 2 MFA "EDP pour la dynamique des populations" de l'Université de Lorraine. Il contient également des compléments qui, faute de temps, ne seront pas abordés en cours. Ce document ayant été d'abord prévu pour un usage personnel, certains détails sont parfois omis, et il est donc susceptible d'évoluer. Toute remarque permettant d'améliorer ce poly est la bienvenue.

Un nombre non négligeable de corrections a été apporté par Léonard Monsaingeon, qui a également repris et détaillé certaines preuves.

Table des matières

1	Equations différentielles	5
1.1	Equations différentielles scalaires	5
1.1.1	Equation de Malthus (~1798)	5
1.1.2	Equation logistique (~1838)	6
1.1.3	Equations monostables : généralisation de l'équation lo- gistique	7
1.1.4	Effet Allee et équations bistables	10
1.1.5	Résumé et notion de stabilité	11
1.2	Systèmes d'équations différentielles	12
1.2.1	Coopération	12
1.2.2	Compétition	16
1.2.3	Proies prédateurs	16
1.3	Points d'équilibre : linéaire et non linéaire	18
1.3.1	Un mot sur le cas général	19
1.3.2	Cas de la dimension 2	20
2	Equations de réaction-diffusion	25
2.1	L'équation de réaction-diffusion	25
2.2	Une justification probabiliste	28
2.3	Principe du maximum parabolique	29
2.3.1	Justification intuitive	30
2.3.2	Principe de comparaison parabolique	30
2.3.3	Problème linéaire et principe du maximum	32
2.4	Des problèmes bien posés	37
2.4.1	Unicité des solutions classiques	38
2.4.2	Continuité en la donnée initiale	38
2.4.3	Existence dans le cas linéaire	39
2.4.4	Existence pour l'équation de réaction-diffusion	44
3	Persistance en domaine borné	49
3.1	Quelques applications simples du principe du maximum	49
3.2	Le cas homogène	52
3.2.1	Condition au bord de Neumann	53
3.2.2	Condition au bord de Dirichlet	61

3.2.3	Condition au bord de Robin	70
3.3	Le cas KPP hétérogène en espace	72
3.3.1	Problème linéaire et fonctions propres principales	73
3.3.2	Retour à l'équation KPP	77
3.3.3	A propos du cas non KPP	81
3.3.4	Dépendance de la valeur propre en les paramètres	82
3.4	Le cas hétérogène périodique en temps	84
4	Phénomènes de propagation dans \mathbb{R}^N	87
4.1	Convergence locale uniforme	88
4.2	Propagation dans \mathbb{R}^N : quelques éléments	93
4.2.1	Le cas linéaire	93
4.2.2	Le cas KPP en dimension 1	95
4.2.3	Un mot sur le cas KPP en dimension supérieure	99
4.3	Fronts de propagation	101
4.4	Vitesses de propagation de Cauchy	108

Chapitre 1

Equations différentielles

La dynamique des populations débute historiquement par l'étude d'équations ou de systèmes d'équations différentielles. Ces modèles les plus simples consistent à suivre l'évolution dans le temps de la population totale, en ignorant sa répartition dans l'espace.

L'objectif de ce premier chapitre est double. Introduire les modèles de dynamique des populations pour en favoriser la compréhension et une approche intuitive, qui pourra s'avérer utile ensuite. Mais aussi passer en revue certains outils qui seront utilisés dans les prochains chapitres (une EDP d'évolution pouvant être vue comme une équation différentielle dans un espace de dimension infinie). En particulier, on introduira la notion de principe de comparaison, qui jouera un rôle fondamental par la suite.

1.1 Equations différentielles scalaires

1.1.1 Equation de Malthus (~1798)

L'histoire de la dynamique des populations commence avec l'équation de Malthus :

$$u'(t) = ru(t),$$

où $t \geq 0$ et $u(t)$ est une fonction à valeurs réelles qui représente la taille de la population. Comme tous les modèles qu'on abordera, c'est un modèle continu (ici en temps).

En mathématiques, on parle évidemment d'équation linéaire d'ordre 1, dont on sait que les solutions sont de la forme $u(0)e^{rt}$. Le paramètre r est le **taux de croissance** et, lorsque $r > 0$, la population croît indéfiniment et tend vers l'infini quand $t \rightarrow +\infty$.

En dynamique des populations, cette équation a été introduite par Malthus, qui faisait l'observation suivante : une population qui croît le fait indéfiniment

et de manière exponentielle. Sa conclusion était que, la croissance des ressources n'étant pas exponentielle, un choc démographique est inéluctable sans un contrôle sur la population.

1.1.2 Equation logistique (~ 1838)

Dans un certain sens, Malthus savait que son modèle n'était pas correct, mais considérait qu'il l'était jusqu'à un point critique qui se traduirait concrètement par un choc démographique (épuisement des ressources). La population humaine globale semble jusqu'ici croître exponentiellement, donc sa conclusion quoique pessimiste pourrait ne pas être à écarter...

Sans entrer dans des discussions sociologiques, on peut néanmoins mettre en doute la thèse de Malthus. Puisque le modèle n'est pas correct, pourquoi pas le modifier ? D'autant qu'on observe bien en écologie que toutes les espèces ne connaissent certainement pas cette croissance exponentielle.

La seconde équation apparue en dynamique des populations est l'équation logistique, ou équation de Verhulst :

$$u'(t) = ru(t) \left(1 - \frac{u(t)}{K} \right).$$

C'est bien sûr encore une équation différentielle d'ordre 1, mais cette fois-ci non linéaire (polynomiale). Il est toujours possible de décrire les solutions par la formule explicite :

$$u(t) = K \frac{1}{1 + (K/u(0) - 1)e^{-rt}}.$$

En particulier, on observe que :

Theorem 1.1.1 *Quelque soit $u(0) > 0$, la solution $u(t)$ est bien définie pour tout temps positif. De plus, elle est strictement positive et tend vers K lorsque $t \rightarrow +\infty$.*

Lorsque $u(0) = 0$, la solution est triviale $u(t) = 0$.

Remark 1.1.2 *On ne considérera pas le cas $u(0) < 0$, puisque u représente une densité de population et doit donc être à valeurs positives. La première partie du théorème énonce une propriété indispensable pour que l'équation soit cohérente avec la réalité.*

On peut néanmoins remarquer (on aura l'occasion d'y revenir plus tard) que la solution n'est pas définie pour tout temps positif lorsque $u(0) < 0$.

Pour prouver ce théorème, on peut vérifier directement que la formule ci-dessus décrit toutes les solutions. En effet, il suffit de remarquer que la fonction $v(t) = 1/u(t)$ satisfait

$$v' = -rv + \frac{r}{K},$$

d'où $v(t) = Ce^{-rt} + \frac{1}{K}$. Cette formule montre aussi qu'une solution non nulle à un instant donné ne peut jamais s'annuler, autrement dit $u(t) = 0$ est bien l'unique solution lorsque $u(0) = 0$.

Bien sûr, cet argument pourra sembler étrange pour les étudiants qui connaissent le théorème de Cauchy-Lipschitz. Une théorie plus générale sera abordée dans la section suivante.

Discutons d'abord du choix de cette équation. Comme annoncé, elle corrige le défaut de l'équation linéaire : la croissance de la population ralentit lorsque la densité augmente, due à la compétition pour les ressources.

La constante K est appelée la **capacité** de l'environnement (toute population de densité supérieure à K décroît). Le paramètre r est le **taux de croissance intrinsèque**, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de compétition. La fonction

$$u \mapsto r\left(1 - \frac{u}{K}\right)$$

est quant à elle appelée **taux de croissance per capita** (ratio entre croissance d'une population et sa densité), et est une fonction décroissante de u . Cela signifie que la compétition ne fait qu'augmenter lorsque la population augmente. Dans un premier temps, cela peut paraître réaliste mais on verra que ce n'est pas toujours satisfaisant.

Remark 1.1.3 *On a mentionné plus haut que, dans ce module, on n'abordera que des modèles continus. Mentionnons ici seulement l'équivalent discret de l'équation logistique, i.e.*

$$u_{n+1} = u_n + ru_n \left(1 - \frac{u_n}{K}\right).$$

C'est un exemple classique de la théorie du chaos. En effet, si lorsque r est petit on retrouve un comportement similaire au cas continu (convergence vers 1), le comportement devient chaotique dès que r dépasse une certaine valeur.

1.1.3 Equations monostables : généralisation de l'équation logistique

En termes de modélisation, il est tout aussi intéressant de considérer l'équation

$$u'(t) = f(u),$$

où $u \mapsto f(u)$ est une fonction localement lipschitzienne (hypothèse essentiellement technique) et satisfait

$$f(0) = f(K) = 0,$$

$$f > 0 \text{ dans } (0, K) \text{ et } f < 0 \text{ hors de } [0, K].$$

Parfois on ajoutera la condition

$$u \mapsto \frac{f(u)}{u} \text{ décroissante.}$$

Cette équation peut être interprétée de manière tout à fait similaire à l'équation logistique. Néanmoins, le raisonnement plus haut ne fonctionne pas puisque nous ne disposons pas en général d'une solution explicite. Ici nous abordons rapidement une théorie générale, qui repose essentiellement sur le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Theorem 1.1.4 (Cauchy-Lipschitz) *Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue, et localement lipschitzienne en sa seconde variable, et tout $u_0 \in \mathbb{R}^N$, il existe une unique solution maximale de*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

c'est-à-dire qu'elle satisfait l'équation sur un intervalle de temps $(-T_1, T_2)$, où $0 < T_1, T_2 \leq \infty$, et ne peut pas être prolongée sur un intervalle plus grand.

Ici nous avons énoncé ce théorème pour un système de N équations différentielles, une situation que nous discuterons plus loin dans ce chapitre.

Un corollaire immédiat est que, sous l'hypothèse que $f(0) = 0$, pour une solution donnée, s'il existe t_0 tel que $u(t_0) = 0$, alors $u(t) \equiv 0$:

Corollary 1.1.5 *Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ continue, et localement lipschitzienne en sa seconde variable.*

- *Si $f(t, 0) = 0$ pour tout t , alors toute solution telle que $u(0) > 0$ satisfait $u(t) > 0$.*
- *Si deux solutions u et v sont telles que $u(0) > v(0)$, alors $u(t) > v(t)$ pour tout t dans l'intersection des intervalles de définition de u et v .*
- *Si u satisfait $u'(t) \leq f(t, u(t))$, si v satisfait $v'(t) > f(t, v(t))$ ainsi que $u(0) \leq v(0)$, alors $u(t) < v(t)$ pour tout $t > 0$ dans l'intersection des intervalles de définition de u et v .*

Remark 1.1.6 *Lorsque $u' \leq f(u)$, on peut parler de sous-solution, et lorsque $v' \geq f(v)$, on parle de sur-solution. Ce vocabulaire est souvent utilisé en EDPs, et deviendra important au chapitre suivant.*

Notons également que, contrairement au théorème de Cauchy-Lipschitz, on a énoncé ces résultats pour une équation seule. En effet, ils ne sont pas vrais en général pour des systèmes de deux équations ou plus.

Cette propriété donne un avant-goût de ce que seront les principes de comparaison pour les EDPs. En dynamique des populations, la condition naturelle $f(0) = 0$ (pas de croissance pour une population qui ne compte aucun individu) garantira qu'une densité de population ne peut jamais devenir négative. La seconde propriété, dont on verra qu'elle pourra être mise à mal plus tard (on peut déjà évoquer les systèmes proie-prédateur), dit qu'une population initiale plus grande implique une population plus grande aux instants ultérieurs.

Nous pouvons maintenant démontrer que le théorème énoncé plus haut pour l'équation logistique demeure vrai pour cette équation différentielle, dite mono-stable.

Proof. Supposons maintenant que $f(0) = f(K) = 0$, que $f > 0$ entre 0 et K et $f < 0$ ailleurs. Alors le théorème de Cauchy-Lipschitz, quel que soit $u(0) > 0$ garantit l'existence d'une solution maximale. Grâce aux principes de comparaison plus haut, il est clair que la fonction u est positive, bornée et monotone. Par conséquent, par un raisonnement par l'absurde trivial, c'est une solution globale. La limite quand $t \rightarrow +\infty$ devient également évidente. ■

Remark 1.1.7 *Rappelons que $1/(1-t)$ est solution de $u' = u^2$. L'utilisation du principe de comparaison est donc importante pour garantir que la solution est bornée, ou même pour garantir qu'elle est bien globale en temps.*

En particulier, comme on l'a mentionné plus haut, si $u(0) < 0$ alors la solution peut exploser (en l'occurrence converger vers $-\infty$) en temps fini.

Incluons, si nécessaire, une esquisse de la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz :

Proof. Soit l'application qui à u associe

$$\Phi_u(t) = u_0 + \int_0^t f(u(s))ds.$$

Cette application est contractante si on se restreint à un intervalle de temps assez petit. Il existe alors un unique point fixe, c'est-à-dire une unique solution sur cet intervalle. On peut ensuite montrer que cette solution, dans un certain sens, ne dépend pas de l'intervalle : sur des intervalles petits, cela vient du fait que Φ est contractante, puis on peut chercher par l'absurde le premier temps où deux solutions ne coïncident pas et utiliser de nouveau l'unicité locale là où les deux fonctions se détachent. Ensuite, il suffit de considérer le plus grand intervalle sur lequel il existe une solution, qui de facto est maximale. ■

Remark 1.1.8 *La preuve n'est pas inintéressante. En particulier, et même si on adoptera une approche différente, l'idée qu'une solution peut être prolongée (et même prolongée en tant que solution) tant qu'elle n'explose pas est très importante dans les équations et systèmes de réaction-diffusion.*

Remark 1.1.9 *Le théorème de Cauchy-Lipschitz n'a pas qu'une portée mathématique. Il dit que, connaissant la donnée initiale, il existe une et une seule évolution possible : on parle de système dynamique. En connaissant la donnée u_0 , on peut théoriquement connaître le futur de la population, et dans le cas d'une EDO, on peut même connaître son passé. Cette dernière propriété (antériorité) ne sera plus vraie pour des EDPs (cf l'équation de la chaleur).*

Terminons sur d'autres conséquences importantes des principes de comparaison, dont la continuité en la donnée initiale :

Theorem 1.1.10 *Soit f une fonction K -lipschitzienne. Alors la solution est globale en temps, i.e. est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Theorem 1.1.11 *Soit f une fonction K -lipschitzienne, $u(0)$ et $v(0)$ deux données initiales. Alors les solutions correspondantes de la même équation différentielle satisfont*

$$|u(t) - v(t)| \leq e^{Kt} |u(0) - v(0)|$$

pour tout $t > 0$.

1.1.4 Effet Allee et équations bistables

L'équation monostable comme définie plus haut n'est qu'un exemple parmi d'autres. Dans la réalité, il existe souvent ce qu'on appelle un "effet Allee", c'est-à-dire qu'il peut exister une corrélation positive (au moins dans certains intervalles) entre la taille de la population et son taux de reproduction. En effet on a dit plus haut que les individus d'une espèce sont en compétition pour les ressources, mais il existe aussi certains phénomènes de coopération. On peut penser par exemple à la lutte contre les prédateurs, ou bien même aux conséquences d'une reproduction sexuée (besoin de trouver des partenaires).

Cet effet Allee peut être **faible** ou **fort**. Un effet Allee faible signifie que l'équation est toujours monostable (sans l'hypothèse $u \mapsto f(u)/u$ décroissante). Un effet Allee fort signifie que le taux de reproduction est même négatif pour les petites valeurs de u . L'exemple le plus classique est l'équation

$$u' = f(u)$$

avec f cubique :

$$f(u) = u(1-u)(u-\theta),$$

où $\theta \in (0, 1)$. Plus généralement, on peut considérer $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ lipschitzienne telle que

$$f(0) = f(\theta) = f(1) = 0$$

$$f > 0 \text{ sur } (\theta, 1), \quad f < 0 \text{ sur } (0, \theta),$$

où là encore $\theta \in (0, 1)$.

Comme auparavant, le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de montrer que :

Theorem 1.1.12 *Pour tout $u(0) \in [0, 1]$, l'équation admet une solution globale en temps telle que $u(t) \in [0, 1]$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, si $u(0) < \theta$, la solution tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$ et, si $u(0) > \theta$, elle tend vers 1 quand $t \rightarrow +\infty$.*

Remarquons qu'on a seulement défini la fonction f sur l'intervalle $[0, 1]$, ce qui est possible grâce au principe de comparaison. On peut bien sûr étendre f en dehors de cet intervalle, par exemple par une fonction négative sur l'intervalle $(1, +\infty)$ (on continue à mettre de côté les valeurs de u négatives qui n'ont pas tellement de sens à ce stade compte tenu du problème modélisé). Il est alors tout aussi clair que, si $u(0) > 1$, la solution tend encore vers 1 quand $t \rightarrow +\infty$.

En dynamique des populations, cela signifie qu'une trop faible population va s'éteindre. La valeur θ est aussi le seuil critique pour la survie de l'espèce.

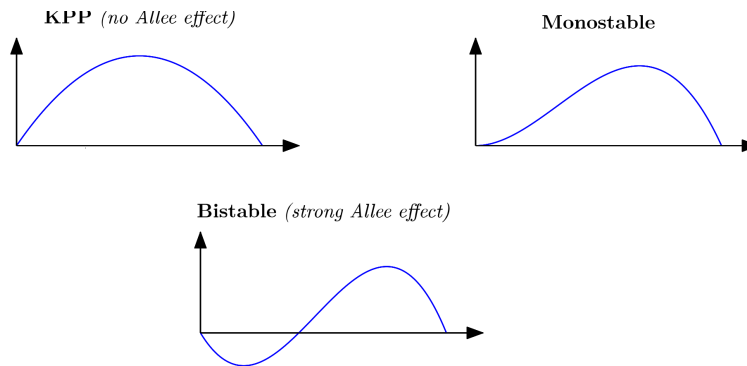
1.1.5 Résumé et notion de stabilité

Faisons maintenant un résumé des modèles que nous avons introduits. Nous avons essentiellement défini 4 classes d'équations :

- **linéaire**,
- **logistique**, dit aussi **KPP**, i.e. f est monostable et (typiquement) concave,
- **monostable** qui inclut le cas logistique/KPP,
- **bistable**.

En voici des exemples typiques :

- $f(u) = ru$
- $f(u) = u(1 - u)$
- $f(u) = u(1 - u)(u + \theta)$
- $f(u) = u(1 - u)(u - \theta)$.



La terminologie monostable et bistable se comprend facilement au vu des théorèmes plus haut. En fait, on devrait plutôt parler de stabilité asymptotique. On dit qu'un état d'équilibre α , i.e. tel que $f(\alpha) = 0$, est **asymptotiquement stable** si pour toute donnée initiale suffisamment proche de α , la solution associée converge vers α quand $t \rightarrow +\infty$.

Dans le cas monostable, il est clair que 1 est le seul état asymptotiquement stable. Il est tout aussi clair que dans le cas bistable, 0 et 1 sont tous les deux asymptotiquement stables.

Il existe plusieurs notions de stabilité. Une notion typique qu'on utilisera souvent est la stabilité (ou instabilité) linéaire. Un état d'équilibre α est **linéairement stable** si $f'(\alpha) < 0$ et **linéairement instable** si $f'(\alpha) > 0$. Alors :

Theorem 1.1.13 Soit une fonction f qui est C^1 au voisinage d'un zéro α (i.e. $f(\alpha) = 0$).

- si $f'(\alpha) < 0$ et $u(0)$ est assez proche de α , alors $u(t) \rightarrow \alpha$ quand $t \rightarrow +\infty$.
- si $f'(\alpha) > 0$ aucune solution (autre que α) ne converge vers α quand $t \rightarrow +\infty$; par contre, si $u(0)$ est assez proche de α , alors $u(t) \rightarrow \alpha$ quand $t \rightarrow -\infty$

Proof. Ce résultat est immédiat puisqu'il suffit, comme on l'aura compris à ce stade, de connaître le signe de f . Il serait aussi possible d'utiliser un principe de comparaison : c'est ce que l'on fait pour obtenir l'équivalent de ce résultat dans le cas d'une EDP parabolique. ■

Les classes d'équations décrites plus haut apparaîtront de nouveau lorsqu'on étudiera de véritables EDPs, il faut donc se souvenir de leurs définitions et surtout de ce qu'elles signifient.

1.2 Systèmes d'équations différentielles

Jusqu'ici, on ne considérait qu'une seule espèce. On sait que la réalité écologique est toute autre : un écosystème est souvent riche et complexe, faisant intervenir de nombreuses espèces qui interagissent les unes avec les autres. Cette richesse biologique se traduit aussi par une zoologie mathématique plus riche, dont l'étude nécessite des outils plus complexes.

En réalité, nous n'aurons sans doute pas le temps d'étudier les systèmes d'EDP associés aux systèmes d'équations différentiels introduits plus bas. Néanmoins, les aborder est une étape intéressante vers l'étude d'EDP, qui comme on l'a mentionné plus haut peuvent être vue comme un système d'équations différentielles de dimension infinie. Dans cette optique, nous nous concentrerons sur les systèmes d'équations différentielles dits coopératifs.

Enfin, nous incluons certains résultats précis de linéarisation pour des systèmes de deux équations différentielles. Bien qu'ils peuvent être généralisés à des systèmes à n équations, d'une part leur preuve est plus simple lorsque $n = 2$, mais par ailleurs ces résultats nous seront utiles plus tard dans le module pour l'étude de certaines équations différentielles d'ordre 2 (voir le chapitre sur les fronts de propagation).

1.2.1 Coopération

On considère d'abord un système de plusieurs espèces en coopération les unes avec les autres :

$$\forall 1 \leq i \leq N, \quad u'_i = f_i(u_1, \dots, u_N).$$

On écrira parfois plus simplement

$$u' = f(u)$$

où u et $f(u)$ sont à valeurs vectorielles dans \mathbb{R}^N .

Les fonctions f_i sont supposées localement lipschitziennes. De plus,

$$f_i(u_1, \dots, u_i = 0, \dots, u_N) \geq 0,$$

et

$$f_i \text{ croissante en toutes les variables } u_j \text{ où } j \neq i.$$

On fait également l'hypothèse simplificatrice que :

$$\forall u_i > 0, \quad f_i \text{ strictement croissante en toutes les variables } u_j \text{ où } j \neq i.$$

En dynamique des populations, on supposerait plutôt que $f_i(u_i = 0) \equiv 0$, mais l'analyse que nous présentons plus bas fonctionne sous l'hypothèse plus faible donnée ci-dessus. Quant aux hypothèses de monotonie, elles ont une interprétation naturelle. L'augmentation de la densité de chacune des espèces induit une augmentation du taux de reproduction des autres, d'où l'idée d'une coopération entre ces espèces. On verra que ces hypothèses ont aussi de profondes implications mathématiques.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (pour les systèmes d'équations différentielles), les solutions sont bien définies au moins localement en temps. L'existence globale en temps est vraie si les f_i sont aussi globalement lipschitziennes, ou comme plus haut, sous des hypothèses naturelles grâce au principe de comparaison plus bas :

Theorem 1.2.1 *Soient $0 < u_i(0) \leq v_i(0)$ pour tout i , alors les solutions correspondantes satisfont $0 < u_i(t) \leq v_i(t)$ pour tout $t > 0$.*

Plus généralement, la même propriété est vraie si pour tout i ,

$$u'_i \leq f_i(u_1, \dots, u_N), \quad v'_i \geq f_i(v_1, \dots, v_N).$$

Remark 1.2.2 *Lorsqu'on écrit "pour tout t ", il faudra comprendre ici "pour tout t dans l'intervalle de définition", les solutions n'étant pas nécessairement globales.*

Proof. Vérifions d'abord que les solutions restent positives. En effet on a que 0 satisfait

$$f(u_1(t), \dots, u_{i-1}(t), 0, u_{i+1}(t), \dots, u_N(t)) \geq 0$$

pour tout t . En appliquant un principe de comparaison à l'équation différentielle

$$v' = g(t, v)$$

où $g(t, v) := f(u_1(t), \dots, u_{i-1}(t), v, u_{i+1}(t), \dots, u_N(t))$, on aboutit à une contradiction. Plus précisément, $u_i(t) > v(t)$ où v est la solution de cette équation différentielle avec $v(0) = 0$. Il est facile de voir que $v(t) \geq 0$ pour tout temps, d'où la conclusion.

Remark 1.2.3 *Comme auparavant, cette propriété est importante du point de vue de la modélisation : il est rassurant de ne pas tomber sur une densité de population négative. Remarquons que nous avons seulement utilisé l'hypothèse*

$$f_i(u_1, \dots, 0, \dots, u_N) \geq 0$$

pour tout i . La structure coopérative du système n'est pas nécessaire pour que la positivité des solutions soit préservée.

Supposons ensuite que u et v sont solutions et $u_i(0) < v_i(0)$ pour tout i , et prenons le premier t_0 tel qu'il y a égalité pour un certain i . En évaluant l'équation, on obtient

$$u'_i(t_0) = f(u_1(t_0), \dots) \geq f(v_1(t_0), \dots) = v'_i(t_0).$$

Si tous les $u_i(t_0)$ ne sont pas identiques aux $v_i(t_0)$, et parce qu'on vient de montrer que la positivité des solutions est préservée en temps, on obtient une contradiction avec l'hypothèse de stricte monotonie sur f . Si $u_i(t_0) = v_i(t_0)$ pour tout i , c'est le théorème de Cauchy-Lipschitz qui donne une contradiction.

Toujours lorsque u et v sont solutions, le cas des inégalités larges peut se retrouver par passage à la limite. Il suffit en effet de considérer les solutions $u_{i,\varepsilon}$ telles que $u_{i,\varepsilon}(0) = u_i(0) - \varepsilon$. D'après le précédent principe de comparaison, il y a monotonie de $u_{i,\varepsilon}$ par rapport à ε , et de plus ces solutions sont bornées par au-dessus par les v_i . Puisqu'elles satisfont ces équations différentielles, leurs dérivées sont également bornées. On peut en déduire par des théorèmes classiques (Dini ou Arzela-Ascoli) qu'elles convergent localement uniformément, ainsi que leurs dérivées. En passant à la limite dans l'équation et par unicité de la solution (encore le théorème de Cauchy-Lipschitz), on obtient que $u_{i,\varepsilon}$ tend bien vers u_i . On en déduit l'inégalité voulue.

La seconde partie du théorème est immédiate si $v'_i > f_i(v_1, \dots, v_N)$. Pour obtenir le cas où cette inégalité est large, il suffit de considérer $w_i = v_i + \varepsilon t$ qui satisfait

$$w'_i > f_i(w_1, \dots, w_N)$$

sur un petit intervalle de temps $[0, \tau]$, où τ ne dépend pas de ε . En passant à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on en déduit que $u_i \leq v_i$ sur l'intervalle de temps $[0, \tau]$. De proche en proche, on peut en déduire que l'inégalité est valable pour tout temps positif. D'une certaine manière, ce type d'idée (perturber une fonction pour se ramener à une inéquation différentielle stricte) sera aussi utile pour prouver les principes de comparaison pour des EDPs. ■

Le principe de comparaison a également d'autres implications. Par exemple, une solution bornée telle que $u'_i(t=0) \geq 0$ pour tout i converge nécessairement vers un état d'équilibre, qu'on peut souvent déterminer explicitement. Et le fait qu'une solution soit bornée peut également être la conséquence du principe de comparaison!

On termine par une dernière propriété. En fait, dans le cas de systèmes de dimension finie, et comme on le verra plus tard, on pourrait faire sans principe de comparaison. Néanmoins il rend les choses un peu plus simples et, comme souvent dans ce chapitre, l'argument ci-dessous est à retenir pour plus tard.

Theorem 1.2.4 *Soit U^* un vecteur de \mathbb{R}^N à composantes positives ou nulles, qui est un état d'équilibre du système plus haut (par exemple le vecteur nul). On suppose qu'il existe \overline{U}_0 dont toutes les composantes sont strictement supérieures à celles de U^* , telle que la solution du système converge vers U^* , et \underline{U}_0 dont toutes les composantes sont strictement inférieures à celles de U^* , telle que la solution converge vers U^* .*

Alors il existe un voisinage de U^* dans lequel toutes les solutions convergent vers U^* .

La preuve est évidente d'après le principe de comparaison plus haut, et on pourra se contenter d'un dessin. En particulier :

Corollary 1.2.5 *On suppose de plus que les f_i sont C^1 . On introduit le système linéarisé autour de U^* , qu'on écrit*

$$w' = Jw$$

où J est la matrice jacobienne de (f_1, \dots, f_N) en U^* .

Si J admet une valeur propre strictement négative $-\lambda$, telle que le vecteur propre associé x_λ n'a que des coordonnées strictement positives, alors la conclusion du théorème précédent est vraie.

Proof. L'idée est d'utiliser ce vecteur propre pour former une "sursolution", dont l'existence d'un \bar{U}_0 satisfaisant l'hypothèse plus haut découle immédiatement. Plus bas, le signe \geq se comprend comme l'inégalité pour chacune des composantes. Choisissons $0 < \varepsilon < \frac{\lambda}{2}$ et, puisque les f_i sont C^1 , on choisit aussi δ tel que

$$f(U^* + w) \leq f(U^*) + Jw + \varepsilon\|w\|$$

pour tout $\|w\| \leq \delta$. En renormalisant x_λ de sorte que $\|x_\lambda\| = 1$, et grâce au fait que toutes les composantes sont positives, quitte à réduire ε on peut supposer que

$$f_i(U^* + \kappa x_\lambda) \leq f_i(U^*) + \varepsilon \kappa x_{\lambda,i}$$

pour tout $|\kappa| \leq \delta$ et $1 \leq i \leq N$.

On calcule ensuite

$$\begin{aligned} & (U^* + \delta x_\lambda e^{-\frac{1}{2}\lambda t})' - A(U^* + \delta x_\lambda e^{-\frac{1}{2}\lambda t}) \\ & \geq (U^*)' - \frac{1}{2}\lambda \delta x_\lambda e^{-\frac{1}{2}\lambda t} - AU^* - (J + \varepsilon)x_\lambda e^{-\frac{1}{2}\lambda t} \\ & \geq \left(-\frac{1}{2}\lambda \delta x_\lambda - (-\lambda + \varepsilon)x_\lambda \right) e^{-\frac{1}{2}\lambda t} \geq 0. \end{aligned}$$

De même, $U^* - \delta x_\lambda e^{-\frac{1}{2}\lambda t}$ est une "sous-solution". On en déduit que les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées. ■

Remark 1.2.6 *L'hypothèse d'existence d'un tel vecteur propre peut sembler sortie de nulle part. Pourtant, pour un système de type coopératif, elle est assez naturelle grâce au théorème de Perron-Frobenius sur les matrices à coefficients positifs. Ce théorème admet également une généralisation en dimension infinie, le théorème de Krein-Rutman, ce qui nous permettra d'appliquer une méthode similaire pour les EDPs.*

Lorsque la valeur propre associée à ce vecteur propre est positive, on peut par un argument similaire en déduire que toutes les solutions dont les composantes

sont strictement positives ne s'approchent jamais de l'état d'équilibre, voire s'en éloignent. Autrement dit, les solutions du problème nonlinéaire se comportent comme celles du problème linéaire !

On pourrait aussi imaginer un argument pour des valeurs propres complexes, selon le signe de la partie réelle. En vérité, ce cas ne se produit pas pour des systèmes coopératifs, car la plus grande valeur propre (qui est en fait celle qui intervient dans ces théorèmes) est forcément réelle (là encore, cf théorème de Perron-Frobenius).

1.2.2 Compétition

On se contentera d'une brève remarque sur les systèmes de compétition. L'idée est qu'on peut se ramener à un système de type coopération. Considérons par exemple

$$\begin{aligned}u_1' &= f(u_1, u_2) \\ u_2' &= g(u_1, u_2)\end{aligned}$$

où f est décroissante en u_2 et g est décroissante en u_1 . On parle bien sûr de compétition car la présence d'une espèce a un effet négatif sur la croissance de l'autre.

Il suffit de remarquer que, si on remplace u_2 par $-u_2$, on retombe essentiellement sur le cas précédent. En particulier, on a une sorte de principe de comparaison.

Theorem 1.2.7 *Si $u_1(0) \leq v_1(0)$ et $u_2(0) \geq v_2(0)$ où (u_1, u_2) et (v_1, v_2) sont deux solutions, alors ces inégalités restent vérifiées pour tout temps.*

1.2.3 Proies prédateurs

Le plus célèbre système est celui de Lotka-Volterra (~ 1925) :

$$\begin{aligned}u' &= u(\alpha - \beta v) \\ v' &= -v(\gamma - \delta u)\end{aligned}$$

qui s'interprète facilement : v nuit à u mais u profite à v . Ainsi u est la proie et v le prédateur.

Ce système est célèbre car pour n'importe quelle donnée initiale non triviale (c'est-à-dire qui n'est pas l'un des deux états d'équilibre), la solution est périodique. Cela peut se vérifier en remarquant que, pour une solution donnée, alors

$$H(u, v) = \beta v + \delta u - \alpha \ln v - \gamma \ln u$$

est constante en temps. De plus, cette fonction est convexe, ce dont on peut déduire que les lignes de niveau sont des courbes fermées dans le quart de plan $u > 0$ et $v > 0$. Des considérations élémentaires dans le plan de phase permettent également de donner les formes de ces courbes, dont on pourra faire un

dessin.

Il est clair, au vu de la forme des solutions, qu'un principe de comparaison n'est pas valable dans ce cas. Plus généralement, il n'existe pas de principe de comparaison pour un système de la forme

$$\begin{aligned}u' &= f(u, v) \\v' &= g(u, v)\end{aligned}$$

lorsque f est décroissante en v et g est croissante en u .

Des considérations géométriques permettent néanmoins de remarquer qu'une solution bornée est convergente, et que sa limite est soit un cycle, soit une solution stationnaire : c'est le théorème de Poincaré-Bendixson. De manière un peu surprenante, cette propriété est vraie pour n'importe quel système de deux équations, tant que les fonctions f et g sont C^1 . Là encore, l'explication est géométrique (et topologique), et le théorème n'est plus valable en dimension supérieure.

Ici, on insistera simplement sur la notion de fonction de Lyapunov : l'utilisation d'une fonctionnelle pour garantir la convergence vers un état d'équilibre est en effet classique dans l'étude des EDOs, avant de l'être dans l'étude des EDPs. Parce que ces fonctionnelles ont parfois une interprétation physique, on peut aussi parler de méthode d'énergie.

Cette notion nécessite de s'adapter à la forme exacte du système, et on introduit donc un exemple :

$$\begin{aligned}u' &= u(1 - u - bv) \\v' &= v(\mu bu - a)\end{aligned}$$

dont on peut aussi dessiner le plan de phase, et qui encore une fois a une interprétation écologique naturelle. Lorsque $v = 0$ (pas de prédateur), la proie u satisfait l'équation logistique. Lorsque $u = 0$ (pas de proie), alors v tend vers 0 en l'absence de nourriture. Ce système est très similaire à celui de Lotka-Volterra, et la fonction de Lyapunov plus bas n'est rien d'autre que la fonctionnelle H utilisée plus haut. Ici, l'ajout du terme logistique entraîne la décroissance (presque) stricte de la fonction de Lyapunov le long d'une solution, alors que dans le cas de Lotka-Volterra elle était constante en temps.

Pour simplifier, on notera u^* , v^* l'état stationnaire non trivial. Alors :

Proposition 1.2.8 *La fonctionnelle*

$$\Phi(u, v) := \mu \int_{u^*}^u \frac{\xi - u^*}{\xi} d\xi + \int_{v^*}^v \frac{\eta - v^*}{\eta} d\eta$$

est positive, strictement convexe et décroissante en temps pour une solution $(u(t), v(t))$ dont les deux composantes sont positives.

Plus précisément

$$(u', v') \cdot \nabla \Phi(u, v) = -\mu(u - u^*)^2 \leq 0.$$

Proof. La positivité est évidente, et la convexité est facile également en calculant la dérivée seconde de

$$h(s) = \mu \int_{u^*}^{u+s\alpha} \frac{\xi - u^*}{\xi} d\xi + \int_{v^*}^{v+s\beta} \frac{\eta - v^*}{\eta} d\eta$$

quel que soit α et β .

La dérivée en temps de

$$t \mapsto \Phi(u(t), v(t))$$

est bien donnée par le terme de gauche plus haut, qui vaut

$$u(1 - u - bv) \times \mu \frac{u - u^*}{u} + v(\mu bu - a) \frac{v - v^*}{v}.$$

Or $u^* = \frac{a}{\mu b}$ et $v_* = \frac{1-u^*}{b}$, et après un développement un peu long on trouve bien le bon résultat. ■

Il s'ensuit immédiatement que $\Phi(u(t), v(t))$ décroît et converge quand $t \rightarrow +\infty$. En particulier, sa dérivée en temps tend vers 0 et donc $u - u^* \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Cette étape n'est en fait pas triviale, il y a une estimation sur la régularité de Φ , et donc de u et v , cachée là-dessous : la dérivée en temps de $\Phi(u(t), v(t))$ est globalement lipschitzienne grâce à l'égalité prouvée dans la proposition (remarquons qu'à ce stade, on peut déjà affirmer que la solution est bornée). Par conséquent, si une sous-suite t_n est telle que $\partial_t \Phi(u(t_n), v(t_n)) < 0$, alors $\Phi(u(t), v(t))$ n'admet pas de bornée inférieure, une contradiction.

Une fois que $u \rightarrow u^*$, il est clair que $v \rightarrow v^*$. Cette fonctionnelle, dite de Lyapunov, implique donc la convergence vers l'état stationnaire non trivial, à condition évidemment de partir d'une donnée initiale dans le bon domaine c'est-à-dire à composantes positives (autrement la fonctionnelle n'est pas définie donc ne doit pas être utilisée).

Remark 1.2.9 *On arrête ici les exemples de systèmes d'équation différentielles inspirés de la dynamique des populations. Il existe bien sûr beaucoup d'autres exemples. On peut en particulier penser au système SIR en épidémiologie, qui a en fait une structure semblable aux systèmes proie-prédateur que l'on vient d'évoquer.*

1.3 Points d'équilibre : linéaire et non linéaire

On pourra sans doute admettre les résultats ci-dessous, qui n'interviendront que plus tard dans l'étude des fronts de propagation. Une propriété fondamentale des systèmes dynamiques qu'on a déjà mentionnée plus haut est que, au voisinage d'un état d'équilibre, les solutions d'un problème non linéaire se comportent de la même manière que celles d'un système linéaire (en tout cas si la nonlinéarité est suffisamment régulière).

On a déjà vu cette propriété sur des cas particuliers : les équations différentielles scalaires, et pour les systèmes de type coopération. C'est aussi le cas pour les systèmes de type proie prédateur : dans le cas de Lotka-Volterra il suffit de remarquer que les valeurs propres du problème linéarisé autour de l'état stationnaire non trivial (u^*, v^*) sont complexes : c'est ce qui explique le fait que les solutions "tournent autour" de cet état d'équilibre.

1.3.1 Un mot sur le cas général

Ce lien entre linéaire et nonlinéaire est beaucoup plus général que les cas évoqués plus haut. Considérons un système non linéaire à N équations, qu'on écrit simplement

$$u' = f(u),$$

où la fonction f à valeurs vectorielles est supposée assez régulière, typiquement $C^{1,r}$ ($r > 0$), parfois simplement C^1 . Sans perte de généralité, on considère l'état d'équilibre 0. Le système se réécrit

$$u' = Ju + g(u)$$

où J est la matrice jacobienne de f en 0 et

$$g(u) = O(\|u\|^{1+r}).$$

On note également $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ les valeurs propres complexes de J (certaines peuvent être identiques, mais pour simplifier on pourra les supposer distinctes), qu'on classe selon leurs parties réelles

$$\Re(\lambda_1) \leq \dots \leq \Re(\lambda_m) < 0 < \Re(\lambda_{m+1}) \leq \dots \leq \Re(\lambda_N).$$

Notons qu'on fait l'hypothèse qu'aucune valeur propre n'a une partie réelle nulle. On peut comprendre intuitivement que la perturbation nonlinéaire, bien que petite, pourrait alors faire pencher la balance dans un sens ou dans l'autre et donc aboutir à des comportements différents.

Quoiqu'il en soit, les solutions du système linéaires peuvent s'écrire, formellement,

$$a_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + a_N e^{\lambda_N t},$$

modulo l'utilisation appropriée de fonctions cosinus et sinus pour les valeurs propres complexes. Il existe alors un sous-espace E_m de dimension m qui est stable par l'équation différentielle linéaire

$$u' = Ju$$

et dans lequel les solutions convergent vers 0 ($a_{m+1} = \dots = a_N = 0$). Toutes les autres solutions s'éloignent de 0.

Remark 1.3.1 *A l'instant on vient d'utiliser le mot stable dans un sens différent qu'auparavant. Il signifie ici que les solutions qui démarrent dans cet espace y restent en tout temps.*

La même chose est vraie pour le problème nonlinéaire, sauf que le sous-espace est remplacé par une variété de dimension m , tangente à E_m . On peut même aller plus loin : grossièrement il existe des sous-espaces $E_k \subset E_m$, $k < m$ sur lesquels la convergence vers 0 est au moins en $e^{-\lambda_k t}$ dans le problème linéarisé, et les autres solutions dans E_m convergent vers 0 au plus en $e^{-\lambda_{k-1} t}$. Dans le système nonlinéaire, il existe des variétés de dimension k qui satisfont des propriétés similaires.

Remark 1.3.2 *Attention : les choses sont un peu plus compliquées lorsque certaines valeurs propres sont identiques ou ont même partie réelle. Ici on se contente d'une description grossière, mais pas tout à fait exacte. La morale est simplement que, sous des hypothèses de régularité appropriée, les solutions du problème nonlinéaire se comportent comme celles du problème linéaire.*

1.3.2 Cas de la dimension 2

On se contentera de détailler le cas de la dimension 2. On écrit le système sous la forme

$$u' = au + bv + g_1(u, v)$$

$$v' = cu + dv + g_2(u, v)$$

où a, b, c et d sont des réels, $g_1(u, v) = O(\|(u, v)\|^{1+r})$, ainsi que g_2 . C'est le cas si le système d'origine est de classe $C^{1,r}$. L'essentiel des résultats plus bas peuvent être étendus lorsque la nonlinéarité est seulement C^1 , mais les preuves sont plus difficiles.

La matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ admet deux valeurs propres complexes (éventuellement identiques). Lorsqu'elles sont complexes, alors elles sont conjuguées. Si les deux valeurs propres sont réelles, alors quitte à changer de base on peut se ramener à l'une des situations suivantes, qu'on pourra illustrer en cours :

- I - $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ noeud propre ;
- II - $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ où $\lambda > \mu > 0$ ou $\mu < \lambda < 0$; noeud impropre ;
- III - $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \gamma & \lambda \end{pmatrix}$ noeud impropre ;
- IV - $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ où λ et μ sont de signes différents ; point selle.

Les cas I et III correspondent au cas où le système admet une valeur propre double. Dans le cas I, il existe deux vecteurs propres linéairement indépendants mais pas dans le cas III. Les cas II et IV correspondent au cas où il y a deux valeurs propres, donc forcément deux vecteurs propres.

Enfin, il peut y avoir deux valeurs propres complexes, qui sont conjuguées l'une de l'autre. Là encore, on peut par un changement de base se ramener au

cas suivant :

— V - $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha \neq 0$; point spirale. Notons ici que la solution est du type $Ae^{\alpha t}(\sin(\beta t - B), \cos(\beta t - B))$.

Le seul cas qu'on laisse de côté dans cette liste, comme les étudiants auront pu le remarquer, est le cas où une valeur propre a une partie réelle nulle. Comme dit plus haut, l'hypothèse qu'aucune valeur propre n'a une partie réelle nulle garantit que la partie linéaire "domine" la partie nonlinéaire. Il n'existe pas de résultats généraux lorsqu'une valeur propre a une partie réelle nulle car il est alors nécessaire de regarder à l'ordre supérieur.

L'idée en dimension 2 est de facilement passer en coordonnées polaires en posant :

$$\begin{aligned} u &= r \cos \theta \\ v &= r \sin \theta. \end{aligned}$$

En multipliant la première équation différentielle par $r \cos \theta$, la seconde par $r \sin \theta$ et en ajoutant, on obtient

$$rr' = r^2[a \cos^2 \theta + (b+c) \cos \theta \sin \theta + d \sin^2 \theta] + r \cos \theta g_1(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta g_2(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

et avec des opérations similaires,

$$r^2 \theta' = r^2[c \cos^2 \theta + (d-a) \cos \theta \sin \theta - b \sin^2 \theta] + r \cos \theta g_2(r \cos \theta, r \sin \theta) - r \sin \theta g_1(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Les cas qui nous serviront le plus souvent sont les cas II et IV. On ne détaillera donc pas les autres ici. Considérons le cas II et une solution non triviale, de sorte que $r(t) > 0$ pour tout temps. Alors

$$r' = r[\lambda \cos^2 \theta + \mu \sin^2 \theta] + \cos \theta g_1(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta g_2(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Quitte à inverser la variable temps, on peut supposer les valeurs propres négatives, par exemple $\mu < \lambda < 0$. Alors, par un simple principe de comparaison comme on l'a énoncé pour les équations différentielles scalaires, on a que $r \rightarrow 0$ avec une vitesse exponentielle

$$r = O(e^{-\lambda t}) \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

Alors, d'après l'équation en θ ,

$$\theta' = [(\mu - \lambda) \cos \theta \sin \theta] + \frac{\cos \theta}{r} g_2(r \cos \theta, r \sin \theta) - \frac{\sin \theta}{r} g_1(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Le fait que $r \rightarrow 0$ et les bornes sur g_1 et g_2 garantissent que les second et troisième termes à droite tendent vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$. D'où

$$\theta' = (\mu - \lambda) \cos \theta \sin \theta + o(1).$$

En temps assez grand ou plus généralement pour r assez petit, θ' a un signe dans certaines régions (qu'on peut facilement dessiner), où on peut même supposer $|\theta'| \geq \varepsilon > 0$. Cela implique que θ tend vers une constante, qui est de la forme $k\frac{\pi}{2}$. Remarquons que le dessin est rigoureux car, puisque $r \rightarrow 0$, la solution reste dans un voisinage de l'équilibre dans lequel le dessin se trouve.

Toujours à l'aide du dessin, on peut comprendre que les trajectoires qui démarrent dans les régions qu'on a dessinées, après un certain temps, se trouvent dans des cônes autour des angles 0 et π , d'un angle aussi petit qu'on le souhaite au fur et à mesure que la solution s'approche de l'équilibre. Autrement dit, $\theta(t) \rightarrow 0$ ou π . On retrouve alors, d'après l'équation en r , que pour tout $\varepsilon > 0$ et t assez grand,

$$e^{(\lambda-\varepsilon)t} \leq r(t) \leq e^{(\lambda+\varepsilon)t}.$$

Là encore, il ne s'agit que d'appliquer un principe de comparaison à l'équation différentielle.

Traçons maintenant un segment entre deux points de deux différentes zones "adjacentes" (là encore, on peut s'aider du dessin). On parcourt ce segment de gauche à droite jusqu'à trouver la première solution qui ne passe jamais dans la zone de gauche. Par continuité de la solution d'une équation différentielle en la donnée initiale (cf la remarque plus bas), cette solution ne passe jamais dans la zone de droite non plus, sinon on contredit le choix de ce point. Donc elle reste dans le cône situé au milieu. En fait, les régions qu'on a dessinées deviennent de plus en plus grande au fur et à mesure qu'on s'approche de l'état d'équilibre. Autrement dit, pour que la solution ne passe pas dans l'une de ces zones, il faut que $\theta(t) \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas,

$$e^{(\mu-\varepsilon)t} \leq r(t) \leq e^{(\mu+\varepsilon)t}.$$

Enfin, nous allons montrer qu'une telle trajectoire est en fait unique. Tout d'abord, grâce aux estimations sur g_1 et g_2 , on peut améliorer l'estimation ci-dessus. En effet, on remarque que la convergence de $\theta(t)$ doit aussi être exponentielle en temps, puis en encadrant $r(t)$ par des sur et sous-solutions de la forme

$$Ae^{\mu t} + Be^{\mu-\varepsilon t}$$

grâce auxquelles on peut montrer que

$$r(t) \sim Ae^{\mu t}$$

avec $A > 0$. Alors $v(t)$ satisfait le même équivalent.

Supposons maintenant qu'il existe deux solutions distinctes (u_1, v_1) et (u_2, v_2) satisfaisant les propriétés qu'on vient d'énoncer. A une translation en temps près, on peut supposer que $A_1 = A_2$, de sorte que $v_1 - v_2 = o(e^{\mu t})$ quand $t \rightarrow +\infty$. De plus $u_1 \ll v_1$ et $u_2 \ll v_2$. Ainsi, d'après la seconde équation différentielle,

$$(v_1 - v_2)' = \mu(v_1 - v_2) + o(v_1 - v_2).$$

A l'aide d'une sous-solution on aboutit à une contradiction : $v_1 - v_2$ ne peut pas converger à une vitesse plus rapide que $e^{\mu t}$, à moins d'être la solution nulle.

Remark 1.3.3 *Dans la preuve ci-dessus on a utilisé le fait qu'une solution de l'équation différentielle est continue en la donnée initiale. Plus précisément,*

$$\|(u_1(t), v_1(t)) - (u_2(t), v_2(t))\| \leq e^{Kt} \|(u_1(0), v_1(0)) - (u_2(0), v_2(0))\|$$

pour tout $t > 0$. La preuve est très similaire au cas d'une seule équation, même si notre système n'admet pas de principe de comparaison. En effet, il suffit de remarquer que $|u_1 - v_1|$, de même que $|u_2 - v_2|$, sont sous-solutions d'un système coopératif, pour lequel il y a bien un principe de comparaison.

Finalement on aboutit à un dessin très similaire à celui qu'on avait dans le cas linéaire. On ne traite pas les autres cas qui encore une fois sont similaires. Remarquons de plus que certains cas peuvent se ramener au précédent : inversion du temps dans l'autre cas II, changement d'inconnues pour le point selle. Résumons de manière grossière ces résultats sous la forme d'un "faux" théorème.

Theorem 1.3.4 *Dans chacun des cas I à V, l'équilibre est pour le système nonlinéaire du même type que pour le système linéaire (i.e. noeud propre, etc..., dans un sens qu'on aura illustré par un dessin).*

Dans le cas II et lorsque l'équilibre est stable, c'est-à-dire dans la situation qu'on a détaillée plus haut, soyons quand même un peu plus précis.

Theorem 1.3.5 *Sous les conditions plus haut et lorsque $\mu < \lambda < 0$. Il existe une unique solution (à translation en temps près) qui tend vers l'état d'équilibre à la vitesse exponentielle $e^{\mu t}$, et dont la trajectoire dans le plan de phase est tangente au vecteur propre associé à μ .*

Toutes les autres solutions tendent vers l'état d'équilibre à la vitesse exponentielle $e^{\lambda t}$ quand $t \rightarrow +\infty$, et leurs trajectoires sont tangentes au vecteur propre associé à λ .

Plus de détails peuvent se trouver dans la plupart des livres sur l'analyse des équations différentielles, par exemple celui de Coddington et Levinson. Ici, on a proposé une preuve "maison" qui tire parti de la régularité $C^{1,r}$ du problème nonlinéaire original (qui permet la construction de certaines sur et sous-solutions), alors que Coddington et Levinson supposent seulement la régularité C^1 .

Chapitre 2

Equations de réaction-diffusion

Le chapitre précédent consistait en une brève introduction des différents types de situations qu'on pouvait souhaiter modéliser en dynamique des populations (écologie, épidémiologie).

Mais dans ce module, il s'agira bien d'étudier des EDPs, qui découlent naturellement des équations considérées plus haut en intégrant la variable spatiale. A partir de maintenant, il s'agira de décrire une fonction $u(t, x)$, qui sera toujours une densité de population mais dépendra cette fois non seulement de t (dans \mathbb{R} ou \mathbb{R}^+) mais aussi de x (dans \mathbb{R}^N ou un dans sous-domaine borné, $N \geq 1$).

2.1 L'équation de réaction-diffusion

Une équation de réaction-diffusion est une équation parabolique de la forme

$$\partial_t u = D\Delta u + f(t, x, u).$$

Ici u est une densité de population qui ne dépend plus seulement de la position dans le temps t mais aussi de la position dans l'espace x . En effet, dans la réalité, une population est rarement répartie uniformément dans l'espace. Le paramètre de diffusion D est strictement positif ; par la suite on choisira $D = 1$, pour simplifier et parce qu'on peut facilement s'y ramener par un changement de variable.

Le terme de "réaction-diffusion" est assez explicite, puisque l'évolution dans le temps de u est régie par deux processus. Ces processus peuvent bien sûr être interprétés :

- le terme de réaction $f(t, x, u)$ sera typiquement choisi parmi ceux qu'on a présentés la dernière fois ; il s'agit du taux de reproduction de l'espèce à un point donné dans le temps et l'espace ;

— le terme de diffusion peut être compris comme un déplacement des individus; de manière très grossière, la population a tendance à s'étaler uniformément, et à se déplacer vers les zones où il y a moins d'individus. Le choix du laplacien, historiquement, est essentiellement phénoménologique : il a avant tout été choisi parce qu'il retranscrit un phénomène naturel. En fait, cela peut être expliqué plus rigoureusement, comme on le verra plus bas, par une approche probabiliste.

Remark 2.1.1 *Un autre intérêt du laplacien est qu'il rend l'équation ci-dessus relativement "sympathique", contrairement à certains autres opérateurs qui pourtant pourraient être pertinents. Elle est en particulier bien posée sous des hypothèses relativement larges (notons que l'équation est non linéaire, ou en tout cas **semi-linéaire**, et n'a donc sans doute pas été étudiée jusqu'ici par les étudiants) et offre un cadre idéal pour une étude qualitative des solutions, ce qui est le principal objectif de ce module. Par ailleurs, c'est une équation relativement classique qui nous permettra de passer en revue, autant qu'on le pourra, un certain nombre d'outils mathématiques puissants et en particulier divers principes du maximum et de comparaison.*

Introduisons maintenant un certain nombre d'hypothèses. Pour bien poser le problème, il est nécessaire d'ajouter des conditions au bord du domaine lorsqu'il existe. Ici,

$$t \in (0, +\infty) \quad , \quad x \in \Omega.$$

On supposera soit

$$\Omega = \mathbb{R}^N \quad (\text{domaine non borné}),$$

soit

$$\Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ ouvert borné connexe, de frontière régulière} \quad (\text{domaine borné}).$$

Dans le cas d'un domaine borné, on pourra considérer l'une des conditions au bord de Ω suivantes :

$$\partial_n u = 0 \quad \text{pour } (t, x) \in (0, +\infty \times \partial\Omega) \quad (\text{Neumann});$$

$$u = 0 \quad \text{pour } (t, x) \in (0, +\infty \times \partial\Omega) \quad (\text{Dirichlet});$$

$$\partial_n u + qu = 0 \quad \text{pour } (t, x) \in (0, +\infty \times \partial\Omega) \quad (\text{Robin}).$$

Ici n désigne le vecteur normal unitaire à $\partial\Omega$, pointé vers l'extérieur du domaine (bien défini puisque la frontière de Ω est régulière). Dans le cas d'une condition de type Robin, q est un réel strictement positif.

Chacune de ces conditions peut être interprétée :

- dans le cas Neumann, aucun individu ne traverse la frontière du domaine, dans un sens ou dans l'autre ;
- dans le cas Dirichlet, l'extérieur de Ω est extrêmement défavorable donc la densité de population est nulle au bord ;
- dans le cas Robin, il existe un flot d'individus entrant ($q > 0$) ou sortant ($q < 0$).

Comme on peut le comprendre intuitivement, le choix de la condition au bord a une influence sur le comportement de la solution u . Néanmoins, les outils mathématiques sont très similaires.

La seconde condition au bord est la condition initiale

$$u(t = 0, \cdot) = u_0 \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

On supposera de plus que u_0 satisfait la condition appropriée sur $\partial\Omega$: on parle de condition de **compatibilité**.

Remark 2.1.2 *Dans les modèles qu'on considère et puisque u est une densité de population, on supposera le plus souvent que $u_0 \geq 0$. Néanmoins, nous pourrions être amenés parfois à considérer des données initiales prenant des valeurs négatives (par exemple en considérant la différence entre deux solutions) donc nous mettons de côté cette hypothèse pour l'instant.*

Enfin, la nonlinéarité f satisfera les hypothèses suivantes :

$$f \in C^1([0, +\infty) \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}),$$

ainsi que (dans ce chapitre)

$$f(\cdot, \cdot, u = 0) \in L^\infty([0, \infty) \times \bar{\Omega}), \quad \partial_u f \in L^\infty([0, +\infty) \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}).$$

Remark 2.1.3 *Là encore, dans un souci de généralité nous ne supposons pas que $f(u = 0) \equiv 0$, même si ce sera une hypothèse habituelle par la suite.*

Notons que les exemples de nonlinéarités qu'on a vu dans le premier chapitre, par exemple $u(1 - u)$, ne satisfont pas la dernière borne sur $\partial_u f$. Néanmoins, comme pour les équations différentielles et à l'aide de principes de comparaison, on peut montrer que toute solution positive est bornée uniformément en temps, ce qui permet de se ramener à la situation plus haut.

Terminons sur une définition de la notion de solution qu'on adoptera ici.

Definition 2.1.4 *Une fonction u est dite une solution (classique) de l'équation de réaction-diffusion si*

$$\begin{aligned} u &\in C^0([0, +\infty) \times \bar{\Omega}), \\ \partial_t u &\in C^0((0, +\infty) \times \Omega), \\ \forall i, \quad \partial_{x_i} u &\in C^0((0, +\infty) \times \bar{\Omega}), \\ \forall i, j, \quad \partial_{x_i x_j} u &\in C^0((0, +\infty) \times \Omega), \end{aligned}$$

et si elle satisfait l'équation de réaction-diffusion, ainsi que la condition initiale et l'une des conditions de Dirichlet/Neumann/Robin.

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$, on impose de plus que, pour tout $T > 0$, il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels que

$$|u(t, x)| \leq Ae^{B|x|}$$

pour tout $t \in (0, T)$ et $x \in \Omega$.

Remark 2.1.5 *La borne sur u à l'infini (bien qu'elle ne soit pas optimale) est importante pour garantir que le problème soit bien posé. Il a en effet été montré (par Tikhonov) que, par exemple, l'équation de la chaleur dans \mathbb{R}^N avec donnée initiale nulle admet des solutions non triviales qui ne satisfont pas cette condition.*

Ce chapitre débutera par une rapide justification, par un argument probabiliste formel, du choix du laplacien pour modéliser les mouvements de population. Ensuite, notre but sera de montrer que ce problème est bien posé, c'est-à-dire qu'il existe bien une solution, et que cette solution est unique. La preuve reposera largement sur des principes de comparaison, dans un esprit similaire à ce qu'on a vu pour les équations différentielles.

Ces principes de comparaison serviront également par la suite, lorsqu'on voudra décrire plus précisément le comportement en temps grand des solutions.

2.2 Une justification probabiliste

L'argument tel qu'il est présenté ici peut être trouvé dans le livre de Roques. On peut aussi le trouver dans les livres de Murray et Shigesada-Kawasaki. Tous ces livres portent sur les mathématiques appliquées à la biologie. On pourra choisir une approche plus simple faisant intervenir directement la discrétisation de l'équation de la chaleur.

On suppose ici que la population est constituée d'un nombre fini N d'individus. On considère un espace discret, à la fois en temps avec un pas de temps $\tau > 0$, et en espace :

$$\{\lambda k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$$

où $\lambda > 0$.

Pour un individu donné, on note $p(t, x)$ la probabilité que l'individu se trouve au point x à l'instant t . Soient ensuite $X_k(t, x)$ qui vaut 1 si le k -ième individu est situé au point x à l'instant t , 0 sinon, et

$$U(t, x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k(t, x)$$

la distribution (normalisée) de la population. En supposant les déplacements des individus indépendants les uns des autres, $U(t, x)$ converge quand $N \rightarrow +\infty$ vers $E[X_k(t, x)] = p(t, x)$.

A chaque instant, l'individu peut :

- se déplacer sur le point voisin à gauche avec la probabilité q ;
- se déplacer sur le point voisin à droite avec la même probabilité q ;
- ne pas bouger avec la probabilité $1 - 2q$.

On insiste sur le fait que la probabilité q ne dépend ni de la position dans le temps et l'espace, ni des positions précédentes de l'individu (marche aléatoire). Alors

$$p(t + \tau, \lambda k) = (1 - 2q)p(t, \lambda k) + q[p(t, \lambda(k - 1)) + p(t, \lambda(k + 1))].$$

On peut déjà voir un laplacien discrétisé apparaître. Pour passer au problème continu, on interpole (formellement) par une fonction suffisamment régulière, qu'on note toujours p , qui satisfait la même égalité pour tout t et x .

Alors

$$\partial_t p(t, x) + O(\tau) = q \frac{\lambda^2}{\tau} \partial_x^2 p + O(\lambda^3/\tau).$$

En faisant tendre λ et τ vers 0 de sorte que $\lim q \frac{\lambda^2}{\tau} = D \in (0, \infty)$, on obtient en passant à la limite l'équation de la chaleur en dimension 1

$$\partial_t p = D \partial_x^2 p.$$

Remark 2.2.1 *Cet argument est formel pour plusieurs raisons. L'interpolation peut être bien choisie mais on ne détaille pas les calculs. Le passage à la limite n'est cohérent que sous certains choix inhérents aussi bien au modèle qu'à l'analyse mathématiques. Enfin, on a montré dans un certain sens la convergence de l'équation mais pas celle des solutions (qui est vraie aussi).*

Remark 2.2.2 *L'argument se généralise facilement à la dimension quelconque. Si l'on ajoute de plus un mécanisme de duplication des individus pour tenir compte de la reproduction, on retrouve aussi un terme de réaction, donc l'équation de réaction-diffusion.*

Notons enfin que des marches aléatoires plus générales peuvent être considérées. Dans ce cas, on retrouve des opérateurs plus généraux dans l'EDP limite, en particulier des opérateurs non locaux faisant intervenir des intégrales de u . On pourra éventuellement discuter plus tard de tels modèles.

2.3 Principe du maximum parabolique

Le principe du maximum parabolique, ou principe de comparaison, est une extension des résultats qu'on a vu pour les équations différentielles. C'est une propriété absolument essentielle de certaines équations paraboliques d'ordre 2, en particulier des équations de réaction-diffusion. Elle repose essentiellement sur le choix du laplacien (mais peut-être étendu à des opérateurs uniformément elliptiques) et le fait qu'il n'y ait qu'une équation : comme pour les équations différentielles, qui sont finalement un cas particulier d'EDP, un système de plusieurs équations ne satisfait en général pas de principe de comparaison.

2.3.1 Justification intuitive

Introduisons d'abord de manière intuitive ce concept. L'argument ci-dessous vaut en dimension quelconque, mais pour simplifier son écriture restreignons nous au cas de la dimension 1, et supposons que $\Omega = [a, b]$ un intervalle borné.

Alors le laplacien, qui n'est rien d'autre que la dérivée seconde, peut être approché par :

$$\partial_x^2 u(t, x) \approx \frac{u(t, x - \delta) + u(t, x + \delta) - 2u(t, x)}{\delta^2}.$$

Une façon classique d'approcher les solutions est de discrétiser en espace le problème, et de considérer le système d'équations différentielles

$$\partial_t u_i = \frac{u_{i-1} + u_{i+1} - 2u_i}{\delta^2} + f(t, a + i\delta, u_i),$$

où $u_i(t, \cdot)$ doit approcher $u(a + i\delta)$, pour $i = 1$ à $E(\frac{b-a}{\delta}) - 1$ (attention : le système n'est pas complet car il faut prendre en compte les conditions au bord).

Or ce système satisfait un principe de comparaison car il est du type coopératif! En admettant que par une interpolation bien choisie puis un passage à la limite, on retrouve la solution de l'équation de réaction-diffusion, on obtient un principe de comparaison pour l'équation de réaction-diffusion.

Ici on donnera une preuve différente du principe de comparaison parabolique, car rendre rigoureux l'argument ci-dessus n'est absolument pas évident (cf convergence de certains schémas numériques). On peut quand même retenir cette idée intuitive : les populations situées à des positions différentes en quelque sorte s'entraident en se déplaçant d'un point à l'autre. Bien sûr, il peut y avoir une compétition entre individus mais elle n'est que locale : il n'y a pas compétition entre des individus situés en des points différents. Ce genre d'analyse permet aussi de comprendre l'importance du choix du modèle.

2.3.2 Principe de comparaison parabolique

Donnons maintenant plus précisément ce (en fait, ces) résultats. Quelques définitions tout d'abord.

Definition 2.3.1 Une fonction $u(t, x)$ est appelée une **sous-solution** de l'équation de réaction-diffusion si

$$\begin{aligned} u &\in C^0([0, +\infty) \times \bar{\Omega}), \\ \partial_t u &\in C^0((0, +\infty) \times \Omega), \\ \forall i, \quad \partial_{x_i} u &\in C^0((0, +\infty) \times \bar{\Omega}), \\ \forall i, j, \quad \partial_{x_i x_j} u &\in C^0((0, +\infty) \times \Omega), \end{aligned}$$

et si elle satisfait les inégalités

$$\partial_t u \leq \Delta u + f(t, x, u), \quad t > 0, \quad x \in \Omega,$$

et, selon la condition au bord considérée lorsque $\partial\Omega$ est non-vide,

$$\partial_n u \leq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \text{ (cas Neumann)}$$

$$u \leq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \text{ (cas Dirichlet)}$$

$$\partial_n u + qu \leq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \text{ (cas Robin, } q > 0).$$

Une fonction v est appelée une **sur-solution** de l'équation de réaction-diffusion lorsqu'elle vérifie la même régularité que ci-dessus mais les inégalités contraires.

Lorsque Ω n'est pas borné, on ajoute la condition que, pour tout $T > 0$,

$$|u(t, x)|, |v(t, x)| \leq Ae^{B|x|}, \quad A, B > 0,$$

pour tout $t \in [0, T]$ et $x \in \Omega$.

Le théorème qu'on souhaite montrer est le suivant. On rappelle que Ω désigne un ouvert connexe, borné ou non, dont l'éventuelle frontière est régulière.

Theorem 2.3.2 Soient u et v respectivement une sous et une sur-solution de l'équation de réaction-diffusion.

- (i) Si $u(t = 0, x) \leq v(t = 0, x)$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$, alors $u(t, x) \leq v(t, x)$ pour tout $t > 0$ et $x \in \overline{\Omega}$.
- (ii) Si de plus $u(t_0, x_0) = v(t_0, x_0)$ pour un $t_0 > 0$ et $x_0 \in \Omega$, alors $u(t, x) \equiv v(t, x)$.
- (iii) Lorsque Ω est borné et la condition au bord est de type Neumann ou Robin, la conclusion de (ii) reste vraie si $x_0 \in \partial\Omega$.

Remark 2.3.3 On rappelle que $\overline{\Omega}$ désigne l'adhérence de Ω dans \mathbb{R}^N . Pour éliminer toute ambiguïté, on précise donc que $\overline{\mathbb{R}^N} = \mathbb{R}^N$.

Pour l'instant, on se contente de noter que la différence $u - v$ satisfait

$$\partial_t(u - v) \leq \Delta(u - v) + f(t, x, u) - f(t, x, v).$$

Grâce à la régularité de u , v et f , on peut réécrire cette équation sous la forme

$$\partial_t w \leq \Delta w + g(t, x)w$$

où

$$g(t, x) := \begin{cases} \frac{f(t, x, u) - f(t, x, v)}{u - v} & \text{si } u - v \neq 0, \\ \partial_u f(t, x, u) & \text{si } u - v = 0, \end{cases}$$

est une fonction continue et uniformément bornée. Il s'agit alors d'étudier cette équation linéaire et de montrer que $w \leq 0$ pour tout $t > 0$ et $x \in \overline{\Omega}$.

2.3.3 Problème linéaire et principe du maximum

Intéressons-nous donc maintenant au cas linéaire, dans lequel nous serons un peu plus généraux que l'équation écrite plus haut. On considère l'équation linéaire

$$\partial_t u = \Delta u + \sum b_i(t, x) \partial_i u + c(t, x)u.$$

On supposera que les fonctions b_i et c sont uniformément bornées.

Remark 2.3.4 *En fait, il suffirait que les fonctions b_i et c soient bornées localement en temps, i.e. uniformément sur tout $[0, T] \times \Omega$ pour tout $T > 0$, ou même sur $[0, T] \times \Omega$ pour tout $T > 0$ lorsque Ω est borné.*

De plus, on pourrait remplacer le laplacien par

$$\sum a_{i,j}(t, x) \partial_i \partial_j u$$

où la famille $a_{i,j}$ forme un opérateur uniformément elliptique, i.e.

$$\alpha \|\xi\|^2 \leq \sum a_{i,j}(t, x) \xi_i \xi_j \leq \beta \|\xi\|^2$$

où $0 < \alpha < \beta < +\infty$, pour tout vecteur $\xi \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $t \geq 0$ et $x \in \Omega$.

On va alors montrer les deux théorèmes suivant.

Theorem 2.3.5 *Soit u une sous-solution de l'équation linéaire telle que $u(t = 0, \cdot) \leq 0$. Alors pour tout $t > 0$, on a $u(t, \cdot) \leq 0$.*

Soit v une sur-solution de l'équation ci-dessus telle que $v(t = 0, \cdot) \geq 0$. Alors pour tout $t > 0$, on a $v(t, \cdot) \geq 0$.

Ce premier théorème est parfois appelé principe faible car il permet des inégalités larges. Dans nos applications il sera suffisant la plupart du temps.

Theorem 2.3.6 *Soit u une sous-solution de l'équation linéaire telle que $u(t = 0, \cdot) \leq 0$. S'il existe $t_0 > 0$ et $x_0 \in \Omega$ tel que $u(t_0, x_0) = 0$, alors $u \equiv 0$ sur $[0, t_0] \times \Omega$.*

Soit v une sur-solution de l'équation ci-dessus telle que $v(t = 0, \cdot) \geq 0$. S'il existe $t_0 > 0$ et $x_0 \in \Omega$ tel que $v(t_0, x_0) = 0$, alors $v \equiv 0$ sur $[0, t_0] \times \Omega$.

Dans le cas Neumann ou Robin, les mêmes conclusions sont vraies lorsque $x_0 \in \partial\Omega$.

Nous appellerons ce second théorème le principe fort.

Ci-dessous nous considérerons séparément les cas d'un domaine borné ou non borné. Par contre, il est clair qu'il suffit de considérer des sous-solutions. Le cas de sur-solutions suit directement en posant $u = -v$.

Domaine borné - Dirichlet

Nous commençons la preuve par un cas simple.

Lemma 2.3.7 *Supposons que Ω est borné. Soit u une sous-solution de l'équation linéaire, qui satisfait de plus toutes les inégalités au sens strict, i.e.*

$$\partial_t u - \Delta u + \sum b_i(t, x) \partial_i u + c(t, x) u < 0,$$

$$u(0, \cdot) < 0, \quad u(\cdot, x \in \partial\Omega) < 0.$$

Alors la conclusion des deux principes, faible et fort, sont justes.

Proof. La conclusion est triviale en prenant le premier $t > 0$ tel que u s'annule à l'intérieur de Ω . Dans le cas d'un opérateur elliptique général, cela fonctionne encore à condition quand même de savoir que

$$\sum a_{i,j} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u \leq 0$$

si une fonction u atteint un maximum local en un point. ■

Nous pouvons maintenant prouver le premier théorème dans le cas d'une condition au bord de Dirichlet. L'idée est en quelque sorte de se ramener au cas précédent.

Proof. Posons $u = e^{Kt} w$ et notons que

$$\partial_t w = \Delta w + \sum b_i \partial_i w + (c - K)w.$$

On peut alors choisir K assez grand pour que $c - K < 0$ pour tout t et $x \in \Omega$. Puisque $u \leq 0$ est équivalent à $w \leq 0$, on peut ainsi se ramener au cas où $c \leq -1 < 0$.

Reprenons donc nos notations précédentes sous cette hypothèse supplémentaire. Supposons par contradiction qu'il existe $t_0 > 0$ et $x_0 \in \Omega$ tel que $u(t_0, x_0) = \delta > 0$ (d'après la condition de Dirichlet u ne peut pas être strictement positive au bord). Sans perte de généralité, supposons que t_0 est le premier temps où u atteint δ . Alors

$$\partial_t u(t_0, x_0) \geq 0, \quad \Delta u(t_0, x_0) \leq 0,$$

$$\forall i, \quad b_i \partial_i u(t_0, x_0) = 0.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} & \partial_t u - \Delta u - \sum b_i \partial_i u - cu \\ & \geq -c\delta > 0, \end{aligned}$$

une contradiction. On conclut que $u \leq 0$. ■

Remark 2.3.8 *Le changement de variable plus haut est très utile. Grâce à cela, par la suite nous pourrions toujours supposer que*

$$c \leq -1.$$

Passons maintenant à la preuve du second théorème, le principe fort, dont le lemme suivant est un cas particulier.

Lemma 2.3.9 *Soit u une sous-solution de l'équation linéaire avec condition au bord de Dirichlet, telle que $u(0, x) < 0$ pour tout $x \in \Omega$.*

Alors $u(t, x) < 0$ pour tout $t > 0$ et $x \in \Omega$.

Proof. Sans perte de généralité, grâce au principe faible, il suffit de considérer le cas où Ω est une boule B_δ . On pose

$$w = u + \varepsilon(\delta^2 - |x|^2)^2 e^{-\alpha t}.$$

On peut facilement choisir ε tel que $w(t = 0, x) < 0$, et de plus $w \leq 0$ pour tout $t > 0$ et $x \in \partial B_\delta$. On peut choisir α tel que c 'est une sous-solution. En effet

$$\begin{aligned} & \partial_t w - \Delta w - \sum b_i \partial_{x_i} w - cw \\ & \leq \varepsilon e^{-\alpha t} (-\alpha(\delta^2 - |x|^2)^2 - ((4N + 8)|x|^2 - 4\delta^2) + C|x|(\delta^2 - |x|^2) + \|c\|_\infty(\delta^2 - |x|^2)^2). \end{aligned}$$

Soit $0 < \delta' < \delta$ tel que

$$(4N + 8)\delta'^2 - 4\delta^2 > C\delta(\delta^2 - \delta'^2) + \|c\|_\infty(\delta^2 - \delta'^2)^2 = O(\delta^3),$$

de sorte que w est sous-solution sur $B_\delta \setminus B_{\delta'}$.

Ensuite on peut choisir α assez grand pour que w soit sous-solution dans $B_{\delta'}$. Finalement, par principe faible,

$$u < w \leq 0$$

pour tout $t > 0$ et $x \in B_\delta$. ■

Nous pouvons maintenant prouver le principe fort.

Proof. On procède par contradiction. Si $u \not\equiv 0$ sur $[0, t_0] \times \Omega$, alors il existe un point (qu'on peut supposer être $(0, 0)$ sans perte de généralité) tel que $u(0, 0) < 0$. Par continuité, $u(0, x) < 0$ sur une boule B_r .

Supposons que le segment qui relie 0 à x_0 est inclus dans Ω , par exemple si Ω est convexe. Puisque Ω est ouvert et quitte à réduire r , on a également que, pour tout $s \in [0, 1]$, la boule de rayon $r > 0$ et de centre sx_0 est incluse dans Ω . On considère ensuite

$$w(t, x) = u\left(t, x + \frac{t}{t_0}x_0\right)$$

qui satisfait une équation du même type que u . On peut alors appliquer le lemme précédent pour conclure que

$$w(t_0, 0) = u(t, x_0) < 0,$$

une contradiction.

Par connexité, il existe toujours un chemin qui relie 0 à x_0 . Ce chemin peut toujours être choisi comme une succession de segments. L'argument se généralise alors aisément. ■

Domaine borné - Neumann et Robin

La preuve du principe faible repose sur le lemme suivant, appelé **lemme de Hopf**.

Lemme 2.3.10 *Soit u une sous-solution de l'équation linéaire (sans condition au bord) telle que $u(t, x) < 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et $x \in \Omega$.*

Si $u(T, x_0) = 0$ pour un certain $x_0 \in \partial\Omega$, alors $\partial_n u(T, x_0) > 0$ où n désigne la normale à $\partial\Omega$ en x_0 .

On parle souvent de lemme, mais on insiste sur l'importance de ce résultat !

Proof. On procède par contradiction et on suppose qu'il existe $x_0 \in \partial\Omega$ tel que $u(T, x_0) = \partial_n u(T, x_0) = 0$. Soit une boule $B_\delta \subset \Omega$ de rayon δ tangente à $\partial\Omega$ en x_0 (une telle boule existe tant que la frontière est régulière). Pour simplifier les calculs, on supposera que le centre de B est situé à l'origine et que $n = (-1, 0, \dots, 0)$.

Puisque $u < 0$ à l'intérieur du domaine, on a pour tout $r \in (0, \delta)$ que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{x \in B_r} u(t, x) < 0.$$

On pose ensuite

$$w = u + \varepsilon_1(t - T) + \varepsilon_2[e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha\delta^2}],$$

où les paramètres ε_i et α seront choisis positifs. Nous allons appliquer un principe de comparaison à w , mais cette fois-ci non pas sur la boule B_δ , mais sur un anneau $A = B_\delta \setminus \overline{B_r}$. Établissons d'abord l'inégalité

$$\begin{aligned} & \partial_t w - \Delta w - b \cdot \nabla w - cw \\ & \leq \varepsilon_1 - \varepsilon_2 e^{-\alpha|x|^2} (4\alpha^2|x|^2 - 2N\alpha - C\alpha|x| - C) \end{aligned}$$

où $C > 0$ est une borne supérieure sur les $|b_i|$ et $|c|$. Fixons d'abord $\alpha > 0$ tel que

$$4\alpha^2|x|^2 - 2N\alpha - C\alpha|x| - C \geq \alpha$$

pour tout $x \in B_\delta \setminus B_{\delta/2}$. Alors w est sous-solution de l'équation dans A si

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \geq \frac{e^{\alpha\delta^2}}{\alpha}$$

et $r \geq \frac{\delta}{2}$. Vérifions ensuite les conditions au bord. Tout d'abord, $w(t, x) \leq u(t, x) \leq 0$ sur ∂B_δ , pour tout temps, indépendamment du choix des paramètres. De plus on a $w < 0$ dans B_r , pour tout $t \in [0, T]$, à condition que

$$\varepsilon_2 < \inf_{[0, T] \times B_r} (-u).$$

Par hypothèse, cet infimum est strictement positif. Enfin, nous avons que $w(0, x) < 0$ pour tout $x \in A$, à condition que

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \leq \frac{T}{e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha \delta^2}}.$$

Nous choisissons donc r assez proche de δ pour que cette dernière condition soit compatible avec la borne inférieure sur $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ énoncée plus haut. Ensuite, nous pouvons choisir ε_2 suffisamment petit puis ε_1 tel que les deux conditions sur $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ soient satisfaites.

Finalement, nous avons bien construit une sous-solution de l'équation sur le domaine A , négative au bord. On en déduit par le principe du maximum faible que

$$w(T, x) \leq 0 \text{ pour tout } x \in A.$$

Or, il est facile de remarquer que $\partial_{x_1} w(T, -\delta, 0, \dots, 0) > 0$ et $w(T, -\delta, 0, \dots, 0) = 0$, une contradiction. ■

Moralement, le lemme de Hopf nous dit que la solution ne peut pas s'annuler au bord avant de s'annuler à l'intérieur lorsque la condition au bord est de Neumann ou de Robin. Le cas Dirichlet nous disant exactement l'inverse, nous pouvons maintenant terminer la preuve du principe faible.

Proof. Comme pour le cas Dirichlet, on peut supposer que $c < -1$. Par contradiction, soient t_0 et x_0 tels que $u(t_0, x_0) = \delta > 0$ et $u(t, x) < \delta$ pour tout $t < t_0$ et $x \in \bar{\Omega}$. D'après le même argument que pour le cas Dirichlet, on a $x_0 \in \partial\Omega$ et même

$$u(t_0, x) < \delta$$

pour tout $x \in \Omega$.

On pose alors $w = u - \delta$ qui satisfait

$$\partial_t w - \Delta w - \sum b_i \partial_i w - cw \leq c\delta \leq 0$$

et qui est donc toujours sous-solution. On applique le lemme de Hopf pour déduire que

$$\partial_n w(t_0, x_0) = \partial_n u(t_0, x_0) > 0.$$

C'est une contradiction dans le cas de Neumann mais aussi dans le cas de Robin puisqu'alors

$$\partial_n u(t_0, x_0) + qu(t_0, x_0) > q\delta > 0.$$

On rappelle en effet qu'on suppose $q > 0$ dans le cas Robin. Le principe faible est démontré. ■

Il ne reste plus qu'à prouver le principe fort dans le cas Neumann ou Robin. Puisqu'on sait déjà, par principe faible, que la sous-solution satisfait toujours $u \leq 0$ sur $\partial\Omega$, le même argument que dans le cas Dirichlet s'applique immédiatement. En particulier, si $u \not\equiv 0$ alors u ne s'annule en aucun $t > 0$ et $x \in \Omega$. Il suffit ensuite d'appliquer une seconde fois le lemme de Hopf pour en déduire que u ne peut pas non plus s'annuler au bord pour un $t > 0$.

Domaines non bornés

On considère maintenant (brièvement) le cas d'un domaine non borné. On pose

$$w = u\varphi(x)$$

où $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ est strictement positive, telle que

$$\frac{|\nabla\varphi|}{\varphi}, \frac{|\nabla \cdot \nabla\varphi|}{\varphi} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

et

$$\varphi(x) = e^{-2B|x|}$$

pour tout $|x|$ grand.

Alors w satisfait une équation parabolique linéaire satisfaisant des hypothèses semblables, et tend vers 0 quand $|x| \rightarrow +\infty$. En particulier, la preuve du principe faible dans le cas Dirichlet s'applique de la même manière. La preuve du principe fort ne faisait pas intervenir le fait que le domaine soit borné.

Insistons sur la nécessité de la borne exponentielle sur la solution. Si cette borne n'est pas vérifiée, il existe toujours un φ tel que $u\varphi \rightarrow 0$ à l'infini. Néanmoins, cette fonction ne peut plus satisfaire les bornes ci-dessus. En particulier, dans l'équation en w nous nous retrouvons avec des termes supplémentaires qui ne sont pas bornés uniformément en espace. Il n'est alors plus possible d'utiliser le changement de variable qui, plus haut, nous permettait de nous ramener à $c \leq -1$: la preuve ne fonctionne plus.

Remark 2.3.11 *Il serait possible de considérer un domaine non borné qui ne soit pas \mathbb{R}^N , donc avec une condition au bord. Le même raisonnement s'applique facilement lorsque la condition au bord est de type Dirichlet. Dans le cas Robin et Neumann, il faut de plus que φ satisfasse une condition au bord de Neumann pour que w satisfasse toujours la même condition au bord, ce qui est possible si la courbure de Ω est bornée. Ici on ne donne pas de détails et c'est pour cela qu'on se contentera du cas \mathbb{R}^N .*

2.4 Des problèmes bien posés

Dans cette section, on montre que l'équation de réaction-diffusion, sous les hypothèses plus haut, est bien posée. Cela signifie :

- existence d'une solution ;
- unicité de la solution ;
- continuité en la donnée initiale.

On va voir que l'unicité et la continuité sont des implications assez immédiates du principe de comparaison. La preuve qu'on propose de l'existence repose aussi sur un principe de comparaison. En fait il existe d'autres types d'argument (par exemple les méthodes variationnelles). Si le temps le permet on pourra aussi étudier le cas d'un système : on verra que, bien que le système ne satisfait

pas un principe de comparaison, le fait qu'un tel principe soit disponible pour chacune des équations peut suffire à prouver que le problème est bien posé.

2.4.1 Unicité des solutions classiques

Theorem 2.4.1 *Soient u et v deux solutions de l'équation de réaction-diffusion avec même condition initiale, et une condition au bord de Dirichlet/Neumann ou Robin.*

Alors $u \equiv v$.

Proof. Il suffit d'appliquer deux fois le principe de comparaison. ■

Remark 2.4.2 *En fait, toute solution au sens faible est également une solution (classique), il y a donc aussi unicité de la solution faible. La régularité des solutions, ainsi que des estimations plus précises, sera donnée et admise plus bas.*

2.4.2 Continuité en la donnée initiale

Theorem 2.4.3 *Soient u et v deux solutions de l'équation de réaction-diffusion avec conditions initiales respectivement u_0 et v_0 , et une même condition au bord de Dirichlet/Neumann ou Robin.*

Alors pour tout $t > 0$

$$\|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_\infty \leq \|u_0 - v_0\|_\infty e^{Kt}$$

où $K = \|\partial_u f\|_\infty$.

Proof. Soit $w = u - v$. Alors

$$\partial_t w - \Delta w = g(t, x)w$$

où $g(t, x)$ définie comme plus haut est uniformément bornée, grâce au fait que $f(t, x, u)$ est globalement lipschitzienne en la variable u . Alors

$$Me^{Kt}$$

est une sur-solution de l'équation ci-dessus, quel que soit $M > 0$. En choisissant $M = \|u_0 - v_0\|_\infty$, on en déduit que

$$u - v \leq \|u_0 - v_0\|_\infty e^{Kt}.$$

L'autre inégalité se déduit de la même manière. ■

Avec un argument similaire, on peut montrer que la solution dépend continuellement aussi de la fonction f .

Theorem 2.4.4 *Soit une suite de fonctions $(f_n)_n$ telle que $f_n \rightarrow f$ et $\partial_u f_n \rightarrow \partial_u f$ (uniformément), où chacune des fonctions f_n satisfait les mêmes hypothèses que f .*

Alors la suite de solutions $(u_n)_n$ correspondantes, avec même condition initiale, converge localement uniformément en temps vers u .

2.4.3 Existence dans le cas linéaire

Des résultats d'existence

Pour l'existence, on s'intéresse d'abord au cas linéaire.

$$\partial_t u = \Delta u + Ku.$$

Les élèves ayant déjà du l'étudier, certaines choses ci-dessous (au moins l'existence d'une solution de l'équation de la chaleur) peuvent être connues. Plus précisément, les élèves doivent connaître l'équation de la chaleur

$$\partial_t u = \Delta u.$$

En posant $u = e^{Kt}w$, il est facile de passer d'un cas à l'autre : il suffit donc de regarder l'équation de la chaleur. Parce que cela nous sera utile par la suite, nous serons un peu plus généraux et considérerons l'équation de la chaleur inhomogène, i.e.

$$\partial_t u - \Delta u = g(t, x).$$

Ici, nous nous contenterons d'énoncer un certain nombre de résultats dont nous aurons besoin. Seuls quelques éléments de preuve seront donnés.

Dans cette section, nous supposons que g est bornée localement en temps (i.e. sur tout ensemble $[0, T] \times \Omega$, donc uniformément en espace lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$). Afin d'obtenir des solutions classiques, nous supposons aussi que g est localement α -holderienne avec $\alpha \in (0, 1)$, c'est-à-dire que pour tout compact $K \subset (0, +\infty) \times \Omega$ il existe une constante C telle que

$$\forall (t_1, x_1), (t_2, x_2) \in K, \quad |g(t_1, x_1) - g(t_2, x_2)| \leq C(|t_1 - t_2|^\alpha + |x_1 - x_2|^\alpha).$$

L'espace des telles fonctions g est noté $C_{loc}^{0,\alpha}((0, +\infty) \times \Omega)$. Dans le compact K , on note simplement $C^{0,\alpha}(K)$ et, enfin, cet espace est muni de la norme

$$\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}(K)} := \|\cdot\|_{L^\infty(K)} + C,$$

où C est la meilleure constante telle que l'inégalité ci-dessus est satisfaite.

On considère tout d'abord le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$. Alors il existe une solution explicite de l'équation de la chaleur inhomogène, donnée par

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} g(s, y) ds dy.$$

On rappelle que u_0 est bornée, par conséquent les intégrales sont bien posées.

Vérifions que c'est bien une solution :

$$\begin{aligned}
\partial_t u &= -\frac{N}{2} \frac{4\pi}{(4\pi t)^{N/2+1}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy + \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int \frac{|x-y|^2}{4t^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy \\
&+ \int_0^t \int -\frac{N}{2} \frac{4\pi}{4\pi(t-s)^{N/2+1}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} g(s, y) ds dy \\
&+ \int_0^t \int \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \frac{|x-y|^2}{4(t-s)^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} g(s, y) dy \\
&+ \lim_{s \rightarrow 0} \int \frac{1}{(4\pi s)^{N/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} g(t, y) dy \\
&= \Delta u + \lim_{s \rightarrow 0} \int \frac{1}{(4\pi s)^{N/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} g(t, y) dy \\
&= \Delta u + g(t, x).
\end{aligned}$$

Le passage à la limite peut être montré comme suit :

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{(4\pi s)^{N/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} g(t, y) dy \\
&= \int \frac{1}{(4\pi s)^{N/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4s}} g(t, x-y) dy \\
&= \int \frac{1}{\pi^{N/2}} e^{-|y|^2} g(t, x-2\sqrt{sy}) dy \\
&\rightarrow \int \frac{1}{\pi^{N/2}} e^{-|y|^2} g(t, x) dy = g(t, x).
\end{aligned}$$

Attention néanmoins à l'intégrabilité de tous ces termes, en particulier en la variable de temps car on dépasse maintenant l'exposant critique d'intégrabilité! En réalité, on peut vérifier que les mauvais termes s'annulent quand g est constante. Les termes liés aux variations de g peuvent être intégrés grâce à son caractère holderien. Si on avait supposé uniquement que g est bornée, il n'aurait pas été possible de dériver au sens classique et, en fait, on obtiendrait a priori seulement une solution au sens des distributions.

La condition initiale (et la continuité) peut être vérifiée par le même calcul. Notons enfin que cette fonction appartient bien aux espaces imposés dans notre définition de solution, et est bornée localement en temps donc satisfait les bornes nécessaires quand $x \rightarrow \infty$.

Remark 2.4.5 *Cette solution met en jeu la solution fondamentale*

$$\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$$

qui satisfait l'équation de la chaleur avec une donnée initiale de type Dirac. Cette solution existe dans des cas plus généraux sans forcément être explicite. Bien sûr, il existe d'autres méthodes pour l'existence d'une solution à l'équation de la chaleur.

Theorem 2.4.6 *Sous les hypothèses plus haut, l'équation de la chaleur admet bien une solution classique pour toute donnée initiale continue et bornée.*

On admettra le résultat, peut-être déjà connu des élèves, dans le cas Ω borné.

Des estimations utiles

Pour résoudre le problème semilinéaire proposé au début de ce chapitre, nous allons avoir besoin de plus d'informations sur les solutions de l'équation de la chaleur. Les théorèmes plus bas sont assez techniques et on ne donnera que des éléments de preuve, en mettant essentiellement en avant le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Theorem 2.4.7 (Estimations de Schauder) *Soient $0 < \alpha' \leq \alpha < 1$ et $g \in C_{loc}^{0,\alpha}((0, +\infty) \times \Omega)$ bornée localement en temps. Alors la solution u de $\partial_t u - \Delta u = g$ avec condition initiale continue et bornée satisfait :*

— pour tout $0 < \tau < T < +\infty$ et tout compact $K \subset \bar{\Omega}$,

$$\begin{aligned} & \|u\|_{C^{0,\alpha}([\tau,T] \times K)} + \|\partial_{x_i} u\|_{C^{0,\alpha}([\tau,T] \times K)} \\ & \leq C \left[\|g\|_{L^\infty([0,T+1] \times \bar{\Omega})} + \|u\|_{L^\infty([0,T+1] \times \bar{\Omega})} \right], \end{aligned}$$

— pour tout $0 < \tau < T < +\infty$ et tout compacts $K' \subset K \subset \Omega$ et $K' \neq K$,

$$\begin{aligned} & \|\partial_t u\|_{C^{0,\alpha'}([\tau,T] \times K')} + \|\partial_{x_i x_j} u\|_{C^{0,\alpha'}([\tau,T] \times K')} \\ & \leq C \left[\|g\|_{C^{0,\alpha}([\tau/2, T+1] \times K)} + \|u\|_{L^\infty([0, T+1] \times K)} \right], \end{aligned}$$

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend que de α , τ , T , K' et K .

Remark 2.4.8 *Comme défini plus haut, par $C_{loc}^{0,\alpha}(E)$, on désigne l'ensemble des fonctions α -holderiennes sur tout compact inclus dans E .*

Proof. La première inégalité passe par des estimations dans des espaces de Sobolev, qui s'injectent dans des espaces de Holder grâce à l'inégalité de Morrey. Plus précisément, l'espace $W^{1,p}$ s'injecte dans $C^{0,\alpha}$ avec $p > N$ et $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$. Concentrons nous ici sur sur la seconde inégalité.

On considère le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$, dans lequel la formule plus haut est disponible :

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} g(s, y) ds dy.$$

On avait calculé

$$\begin{aligned} \partial_t u &= -\frac{N}{2} \frac{4\pi}{(4\pi t)^{N/2+1}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy + \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int \frac{|x-y|^2}{4t^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy \\ &+ \int_0^t \int -\frac{N}{2} \frac{4\pi}{4\pi(t-s)^{N/2+1}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} g(s, y) ds dy \\ &+ \int_0^t \int \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \frac{|x-y|^2}{4(t-s)^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} g(s, y) dy \\ &+ g(t, x). \end{aligned}$$

Comme auparavant, il y a une difficulté ici, cachée dans l'intégrabilité de tous les termes : une partie du caractère holderien de g peut être "sacrifié" (même si ce n'est pas optimal) pour pouvoir intégrer, et on en déduit ensuite que $\partial_t u$ est α' -holderienne pour tout $\alpha' < \alpha$. Quant au dernier terme, il était déjà évident qu'on ne peut le borner que par la norme $C^{0,\alpha}$ de g . Là encore, on ne fait pas de calcul pour les dérivées en espace qui sont similaires.

Lorsque $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, il faut introduire une fonction de "cut-off" $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, telle que $0 \leq \zeta \leq 1$, ζ vaut 1 dans K et ζ vaut 0 dans $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Alors on peut vérifier que

$$v = \zeta u$$

satisfait l'équation

$$\partial_t v - \Delta v = -2\nabla\zeta \cdot \nabla u - u\Delta\zeta + g\zeta =: \tilde{g}.$$

dans \mathbb{R}^N tout entier (remarquons que v est bien défini trivialement dans \mathbb{R}^N tout entier, même si u ne l'est pas). On peut alors utiliser la formule plus haut. Notons quand même que \tilde{g} peut ne pas satisfaire les bonnes hypothèses (en fait, ce n'est pas un problème si on admet la première inégalité pour les solutions faibles). Néanmoins, on peut utiliser une intégration par parties pour transformer le terme ∇u en un terme en u . Cette intégration par parties pourrait a priori poser de nouvelles difficultés d'intégrabilité : heureusement $\nabla\zeta$ et $\Delta\zeta$ s'annulent au voisinage de tout point considéré, ce qui efface en fait, dans la formule, la singularité de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur. La fonction u étant bornée, on peut ensuite étendre la première inégalité, les nouveaux termes ne posant finalement pas de difficulté. Ensuite, on réitère en sachant cette fois que \tilde{g} est bien $C^{0,\alpha}$ dans $[\tau/2, T+1] \times K'$ où $K \subset K' \subset \Omega$, ce qui est suffisant.

Remarquons enfin que le raisonnement ci-dessus pour $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ omet de prouver la première inégalité jusqu'au bord. On peut se contenter de l'admettre, comme on l'a fait dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$, ou remarquer qu'il suffit de la prouver en remplaçant K par Ω , la borne de droite ne dépendant en effet pas du choix du compact. ■

Enfin, plus dans un souci de complétude, on mentionne le résultat suivant qui étend la régularité jusqu'au bord lorsque Ω est borné :

Theorem 2.4.9 (Régularité jusqu'au bord) *Lorsque Ω est borné et si, en plus des hypothèses du théorème précédent on suppose aussi que*

$$g \in C_{loc}^{0,\alpha}((0, +\infty) \times \overline{\Omega}),$$

alors la seconde inégalité du théorème précédent reste vraie avec $K = K' = \overline{\Omega}$.

Evidemment, il n'est plus possible d'appliquer l'argument plus haut pour se ramener au cas $\Omega = \mathbb{R}^N$. C'est aussi pour cela qu'on a séparé les estimations de Schauder à l'intérieur du domaine de celles jusqu'au bord. Néanmoins, ce théorème peut se prouver par un argument similaire. En effet, d'après la

régularité de $\partial\Omega$, le domaine ressemble localement au voisinage de tout point du bord (à un difféomorphisme près) à un demi-espace. Il est possible de "cut" cette solution, puis de l'étendre vers 0, pour en faire cette fois-ci une solution v de

$$\partial_t v - \Delta v = \tilde{g}, \quad \mathbb{R}^{N-1} \times \{x_N > 0\},$$

avec la condition au bord appropriée, où \tilde{g} dépend cette fois-ci à la fois de u et du difféomorphisme. Il s'avère que l'équation de la chaleur dans ce demi-espace admet une solution fondamentale qui joue le même rôle que pour l'équation posée dans \mathbb{R}^N , ce qui permet par un calcul explicite d'obtenir le théorème ci-dessus.

Quelques remarques :

Remark 2.4.10 *Comme on le verra aussi indirectement dans la prochaine section, il serait possible de remplacer à droite des inégalités les normes $\|u\|_\infty$ par $\|u_0\|_\infty$. En effet, sous nos hypothèses, une application du principe de comparaison donne immédiatement que*

$$\|u\|_{L^\infty([0, T+1] \times \bar{\Omega})} \leq C(T+1)\|g\|_{L^\infty([0, T+1] \times \bar{\Omega})} + \|u_0\|_{L^\infty(\bar{\Omega})},$$

où $C > 0$.

Remark 2.4.11 *De manière très grossière, la morale est la suivante. Lorsque g appartient à un espace donné, alors u , $\partial_t u$, $\partial_{x_i} u$ et $\partial_{x_i, x_j} u$ appartiennent aux mêmes espaces pour tout temps positif. De plus, les normes de la solution et de ses dérivées dans cet espace peuvent être estimées.*

Sous des conditions au bord plus générales (qu'on ne considérera jamais dans ce cours), par exemple

$$u|_{\partial\Omega} = h,$$

il est bien sûr nécessaire pour les estimations jusqu'au bord (second théorème et première inégalité du premier théorème) d'ajouter une condition sur la régularité de h . Pour les estimations à l'intérieur (seconde inégalité du premier théorème), la condition au bord n'intervient pas (si ce n'est dans le fait que la constante peut exploser quand K s'approche de $\partial\Omega$). Il faut donc bien distinguer ces deux types d'estimation, même si dans ce cours elles peuvent sembler de même nature puisque nos conditions au bord "régulières".

Remark 2.4.12 *Pour certains détails, on peut voir par exemple le livre de Evans, qui montre des estimations à l'intérieur lorsque $g \equiv 0$ mais dont les calculs peuvent se généraliser. Le livre de Ladyzhenskaya répertorie toutes ces estimations et bien d'autres mais il est difficile d'accès. Les mêmes arguments sont expliqués aussi dans les livres de Krylov (essentiellement celui sur les espaces de Holder pour les arguments plus haut, mais aussi celui sur les espaces de Sobolev pour la première inégalité du théorème).*

Remark 2.4.13 *Enfin, les arguments de "cut-off" ci-dessus peuvent aussi constituer une preuve de la régularité d'une solution faible. Ce n'est pas trivial (les calculs ci-dessus supposent à priori l'existence de dérivées classiques en temps à l'ordre 1 et en espace jusqu'à l'ordre 2), mais il est possible de faire le calcul au sens des distributions puis de récupérer a posteriori la régularité de la solution.*

L'intérêt des estimations ci-dessus est que l'opérateur qui à un terme source g associe la solution de l'équation de la chaleur est, en un certain sens, compact. En effet, le théorème d'Arzela-Ascoli dit qu'une suite bornée dans $C^{0,\alpha}(K)$, où K est compact, admet une sous-suite convergente pour la topologie uniforme. Les estimées plus haut, ainsi qu'un procédé d'extraction diagonale, permettent alors d'obtenir le corollaire suivant :

Corollary 2.4.14 *Soit une suite g_k de fonctions continues sur $[0, T] \times \bar{\Omega}$, et telle que pour tout $0 < \tau < T$,*

$$\sup_k \|g_k\|_{C^{0,\alpha}([\tau, T], \bar{\Omega})} < +\infty.$$

Soit également une suite de conditions initiales $u_{k,0}$ continues sur $\bar{\Omega}$ telle que

$$\sup_k \|u_{k,0}\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} < +\infty.$$

Alors les suites g_k et u_k des solutions des équations

$$\partial_t u_k - \Delta u_k = g_k,$$

convergent localement uniformément, à extraction d'une sous-suite près, vers g_∞ et u_∞ telles que

$$\partial_t u_\infty - \Delta u_\infty = g_\infty.$$

Cela provient simplement du fait que $C^{0,\alpha}$ est relativement compact dans la topologie localement uniforme. Autrement dit, la régularité jusqu'au bord implique que u et ses dérivées (ordre 1 en temps et ordre 2 en espace) convergent toutes localement uniformément, ce qui permet de passer à la limite dans l'équation de réaction-diffusion. Remarquons que cet argument cache un procédé d'extraction diagonale, aucune de nos estimations n'étant uniforme en temps ici.

Plus de détails seront données dans la section suivante où l'argument reposera justement sur une telle compacité. Ce type d'arguments apparaîtra également dans les prochains chapitres, c'est pourquoi on écrit ce corollaire, même s'il ne sera jamais appliqué tel quel.

2.4.4 Existence pour l'équation de réaction-diffusion

On rappelle l'équation de réaction-diffusion

$$\partial_t u = \Delta u + f(t, x, u),$$

et qu'on avait supposé que f est C^1 , $f(t, x, u = 0) \in L^\infty$ et $\partial_u f \in L^\infty$. En réutilisant une astuce similaire à précédemment, on peut se ramener au cas où f est croissante en u : en posant $u(t, x) = e^{-Lt} \tilde{u}(t, x)$, avec $L = \sup |\partial_u f|$, on se ramène à la même EDP avec la non-linéarité $\tilde{f}(t, x, \tilde{u}) = L\tilde{u} + e^{Lt} f(t, x, e^{-Lt} \tilde{u})$, qui est bien croissante en \tilde{u} . On pose ensuite $M > 0$ assez grand tel que

$$-M \leq u_0 \leq M.$$

Grâce à nos hypothèses sur f , nous pouvons fixer $K > 1$ tel que

$$|f(t, x, u)| \leq K(1 + |u|)$$

et tel que pour tout $u \geq -M$, $t \geq 0$ et $x \in \Omega$,

$$f(t, x, u) \leq K(1 + u + M),$$

et pour tout $u \leq M$, $t \geq 0$ et $x \in \Omega$,

$$f(t, x, u) \geq K(-1 + u - M).$$

Nous ferons donc ces hypothèses dans cette section : à ce stade elles peuvent paraître artificielle, mais ces inégalités permettent de contrôler les solutions du problème non linéaire par les solutions de problèmes linéaires dont on connaît déjà l'existence. Ici, on a choisi des problèmes linéaires qui soient en-dessous et au-dessus de f sur $(-\infty, M)$ et $(-M, +\infty)$, afin d'inclure l'intervalle dans lequel vit la donnée initiale.

L'idée de la preuve est d'approcher la solution par une suite de solutions $(u^k)_k$ d'un problème linéaire. La méthode est appelée méthode d'**itération monotone** et fait appel au principe de comparaison et à certaines estimations données plus haut.

Remark 2.4.15 *On choisit ici la notation u^k pour les fonctions de la suite pour éviter toute ambiguïté avec la donnée initiale u_0 . Cependant, il ne faudra pas y voir des puissances de u .*

Posons tout d'abord \underline{u} la solution de

$$\partial_t \underline{u} - \Delta \underline{u} = K(-1 + \underline{u} - M)$$

avec donnée initiale u_0 . Il s'agit d'une équation de la chaleur (à un terme linéaire près qu'on peut facilement enlever par changement de variable), donc cette solution existe au sens classique introduit dans ce chapitre.

Remark 2.4.16 *Bien sûr, lorsque Ω a un bord, la fonction \underline{u} doit aussi satisfaire la condition au bord. Parce que l'argument fonctionne de la même manière dans tous les cas et pour simplifier la rédaction, nous l'omettrons dans cette preuve.*

Remarquons que M est sur-solution de cette équation. Par conséquent $\underline{u} \leq M$ pour tout t et x , et d'après les bornes sur f plus haut, nous avons que

$$\partial_t \underline{u} - \Delta \underline{u} \leq f(t, x, \underline{u}).$$

Autrement dit \underline{u} est une sous-solution de l'équation de réaction-diffusion.

De la même manière, la solution \bar{u} de

$$\partial_t \bar{u} - \Delta \bar{u} = K(1 + \bar{u} + M)$$

avec donnée initiale u_0 est sur-solution de l'équation de réaction-diffusion. Il est de plus clair que $\underline{u} < \bar{u}$ pour tout temps positif.

Construisons maintenant notre suite de solution. Posons tout d'abord $u^0 = \underline{u}$, puis u^1 la solution (classique) de

$$\partial_t u^1 - \Delta u^1 = f(t, x, u^0),$$

avec condition initiale

$$u^1(t=0) = u_0,$$

et la condition au bord appropriée. Cette solution est bien définie d'après la section précédente, puisque c'est simplement l'équation de la chaleur inhomogène, et que le terme source $f(t, x, u^0)$ est suffisamment régulier. D'après le principe de comparaison, il est clair que

$$u^0 \leq u^1.$$

Par ailleurs, grâce à la monotonie de f , on a que

$$\partial_t u^1 - \Delta u^1 \leq f(t, x, \bar{u})$$

d'où, à nouveau par principe de comparaison,

$$u^1 \leq \bar{u}.$$

Par récurrence, on peut construire une suite de fonctions $(u^k)_k$ telle que

$$\partial_t u^{k+1} - \Delta u^{k+1} = f(t, x, u^k)$$

et on remarque que

$$u^0 \leq u^k \leq u^{k+1} \leq \bar{u}$$

pour tout k . Notons qu'à chaque étape, la solution est bien définie puisque $f(t, x, u^k)$ est bien bornée localement en temps, mais aussi holderienne sur tout compact (par hypothèse sur f mais aussi en appliquant les estimations de Schauder à chaque itération). Notons également que cette récurrence fonctionne uniquement grâce à la monotonie de f en la variable u .

En particulier, la suite converge (simplement) vers une fonction u . Formellement, on voudrait passer à la limite dans l'équation ci-dessus et en déduire que

$$\partial_t u - \Delta u = f(t, x, u).$$

Cela signifierait que u est bien solution de l'équation de réaction-diffusion. Néanmoins, il n'est pas trivial de passer à la limite car nous ne savons pas si les dérivées des fonctions u_k convergent également. C'est ici qu'entrent véritablement en jeu les estimations données plus haut !

Cette partie est un peu technique. Il faut procéder en plusieurs étapes et avec prudence car les éléments de la suite interviennent dans le terme source de chaque équation de la chaleur. Tout d'abord, la suite de fonctions

$$g_k(t, x) = f(t, x, u^k(t, x))$$

est bornée localement en temps mais uniformément en k . En effet

$$\sup_k \|g_k\|_{L^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})} \leq \|f(t, x, \bar{u}(t, x))\|_{L^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})} \leq (1 + M)e^{2KT}.$$

Cette dernière inégalité provient, là encore, d'un principe de comparaison, car $(1 + M)e^{2Kt}$ est sur-solution de l'équation satisfaite par \bar{u} . Bien sûr, ce n'est pas une borne optimale, ce qui n'est pas important ici.

On en déduit, d'après les estimations jusqu'au bord plus haut, que la suite $\|u^k\|_{C^{0,\alpha}([\tau, T] \times K)}$ est également bornée, quelque soient $0 < \tau < T < +\infty$ et $K \subset \bar{\Omega}$ compact. On peut ensuite appliquer le second théorème et conclure que la suite u_k , ainsi que les suites de ses dérivées en temps (première) et espace (premières et secondes) sont toutes uniformément bornées en norme $C^{0,\alpha}$ sur tout compact $K' \subset \Omega$.

D'après le théorème d'Arzela-Ascoli, une suite de fonctions, définies sur un compact, dont la norme $C^{0,\alpha}$ est bornée, admet une sous-suite convergente pour la topologie uniforme. À l'aide d'un procédé d'extraction diagonale, on peut en déduire à extraction d'une sous-suite près que u^k converge, uniformément sur tout compact de $(0, \infty) \times \Omega$, vers une fonction u^∞ , et que les dérivées de u_k convergent vers les dérivées de u^∞ . Par unicité de la limite, il est clair que $u^\infty \equiv u$ exhibée plus haut, quel que soit le choix de la sous-suite.

On conclut que la suite toute entière (ainsi que ses dérivées) convergent vers u (et vers les dérivées de u). On peut donc passer à la limite dans l'équation, ainsi que sur la condition sur le bord $\partial\Omega$ (quelle qu'elle soit), et conclure que u satisfait bien l'équation de la réaction-diffusion.

L'argument ci-dessus omet de montrer que u vérifie bien la condition initiale, car les espaces de Holder considérés ne sont que sur des intervalles $[\tau, T]$. Néanmoins, $\underline{u}(t, x)$ et $\bar{u}(t, x)$ sont continues en temps et en espace jusqu'à $t = 0$ (comme solutions de deux EDPs paraboliques linéaires à coefficients constants ; voir aussi notre définition de solution classique), et ont la même donnée initiale $u_0(x)$. On encadre alors $\underline{u}(t, x) \leq u(t, x) \leq \bar{u}(t, x)$, et le lemme des gendarmes montre donc que $u(t, x) \rightarrow u_0(x_0)$ si $(t, x) \rightarrow (0, x_0)$. Ceci est appelée la *méthode des barrières* (les barrières étant \underline{u}, \bar{u}), qui est une méthode typiquement employée pour les questions de régularité jusqu'au bord, soit pour $x \in \partial\Omega$ soit comme ici pour $t = 0$.

Remark 2.4.17 *Pour passer à la limite dans l'équation, seules les estimations de Schauder à l'intérieur sont nécessaires. Les estimations de Schauder au bord ne sont nécessaires que pour les dérivées premières en espace, et seulement pour une condition au bord de type Neumann ou Robin, mais on a quand même inclus le théorème général plus haut.*

Nous pouvons donc enfin conclure ce chapitre sur le théorème suivant :

Theorem 2.4.18 *Sous les hypothèses de début de chapitre sur Ω , f et u_0 , l'équation de réaction-diffusion*

$$\partial_t u = \Delta u + f(u),$$

$$u(t = 0) = u_0,$$

avec condition au bord de Dirichlet, Neumann ou Robin, admet bien une solution classique.

Chapitre 3

Persistance en domaine borné

Dans ce chapitre, on considère l'équation

$$\partial_t u = D\Delta u + f(t, x, u)$$

où $D > 0$, posée sur un domaine spatial Ω ouvert, borné et à frontière régulière. La condition au bord est du type Dirichlet, Neumann ou Robin, et sera précisée lorsque nécessaire. La donnée initiale est supposée continue sur $\bar{\Omega}$ (donc bornée), et positive ou nulle :

$$0 \leq u_0 \in C(\bar{\Omega}).$$

Le choix de f se fait de nouveau pour des modèles de dynamique des populations. En particulier, on supposera que

$$f \in C^1([0, +\infty) \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R})$$

$$f(t, x, u = 0) \equiv 0 \quad , \quad \exists M > 0, \forall u \geq M, f(t, x, u) \leq 0.$$

La régularité de f permettra d'appliquer les théorèmes du chapitre précédent (notons quand même qu'on ne suppose pas $\partial_u f$ bornée). Les secondes hypothèses ont un sens clair du point de vue du modèle.

A partir de maintenant, on va s'intéresser au comportement en temps grand des solutions, afin de décrire l'évolution de u qui représente une densité de population. Ce chapitre sera essentiellement divisé en deux parties, selon si f dépend de (t, x) ou pas, mais on commencera d'abord par quelques propriétés générales "simples".

3.1 Quelques applications simples du principe du maximum

Vérifions d'abord que tous les théorèmes du chapitre précédent s'appliquent, bien qu'on ne suppose pas $\partial_u f$ bornée. Tout d'abord, on laissera les étudiants

vérifier qu'il n'était pas nécessaire de borner $\partial_u f$ uniformément en temps : si $\partial_u f$ est bornée sur $[0, T]$ quel que soit $T > 0$, il suffit d'appliquer les méthodes du chapitre précédent pour vérifier que les principes de comparaison sont valides et que la solution existe bien jusqu'au temps T , donc jusqu'en $t = +\infty$.

Il reste néanmoins à s'adapter au fait que $\partial_u f$ n'est pas bornée uniformément en u . Définissons donc une fonction \tilde{f} telle que

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t, x, u) &= f(t, x, u) \text{ si } u \in [0, M + 1] \\ \tilde{f}(t, x, u) &= \partial_u f(t, x, 0)u \text{ si } u < 0 \\ \tilde{f}(t, x, u) &= f(t, x, M + 1) + \partial_u f(t, x, M + 1)(u - M - 1) \text{ si } u > M + 1.\end{aligned}$$

Alors l'équation

$$\partial_t u = D\Delta u + \tilde{f}(t, x, u)$$

est bien posée d'après le chapitre précédent (modulo l'argument ci-dessus). Quitte à augmenter la constante M , on peut de plus supposer que

$$\|u_0\|_\infty \leq M.$$

Alors, d'après le principe de comparaison, on a

$$0 \leq u(t, x) \leq M$$

pour tout $(t, x) \in (0, +\infty) \times \bar{\Omega}$. Par conséquent, u satisfait aussi l'équation

$$\partial_t u = D\Delta u + f(t, x, u).$$

L'existence d'une solution est donc bien prouvée.

Réciproquement, si $u(t, x)$ est une solution classique (cf le chapitre précédent) de l'équation $\partial_t u = D\Delta u + f(t, x, u)$, on peut montrer que

$$0 \leq u(t, x) \leq M$$

pour tout $(t, x) \in (0, +\infty) \times \bar{\Omega}$. Là encore, il n'est pas possible d'appliquer directement le théorème du précédent chapitre puisque $\partial_u f$ n'est pas bornée. L'argument fonctionne pourtant de la même manière. Supposons par contradiction qu'il existe $t_0 > 0$ le premier temps tel que

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(t, x) = M + \delta,$$

où $0 < \delta < 1$. Alors sur l'intervalle de temps $[0, t_0]$, on a pour tout $x \in \bar{\Omega}$ que $0 \leq u(t, x) \leq M + \delta$. Autrement dit, u est une solution sur ce même intervalle de temps de l'équation de réaction-diffusion avec la nonlinéarité \tilde{f} . On peut donc appliquer un principe de comparaison sur cet intervalle de temps et aboutir à une contradiction.

On peut donc en déduire qu'une solution de $\partial_t u = D\Delta u + f(t, x, u)$ est aussi solution de la même équation avec \tilde{f} à la place de f . Elle est donc unique, continue en la donnée initiale, et le problème satisfait bien un principe de comparaison.

Remark 3.1.1 Ici on vient d'utiliser le fait que la solution est continue et que le domaine est borné, ce qui garantit que $t_0 > 0$. Lorsque le domaine n'est pas borné (ce sera le cas dans le chapitre suivant), l'argument est un peu plus complexe car a priori la solution pourrait immédiatement exploser en $|x| \rightarrow \infty$, et nécessite certaines conditions supplémentaires mais naturelles.

Finalement, le théorème suivant est vrai :

Theorem 3.1.2 Sous les hypothèses plus haut, l'équation

$$\partial_t u = D\delta u + f(t, x, u)$$

est bien posée et, quel que soit la condition au bord parmi Dirichlet, Neumann ou Robin, ce problème satisfait un principe de comparaison.

Cet énoncé n'est pas très précis. On peut le reformuler ainsi : tous les résultats du chapitre précédent sont encore vrais.

Remark 3.1.3 Si $f(u) = u(1 - u)$ et $u_0 < 0$, alors la solution peut exploser. Il faut donc insister sur le fait que les hypothèses portent aussi sur la donnée initiale.

Les principes de comparaison faible et fort impliquent immédiatement la proposition suivante :

Proposition 3.1.4 Sous les hypothèses plus haut, pour tout $t > 0$ et $x \in \overline{\Omega}$,

$$0 \leq u(t, x) \leq \max\{\|u_0\|_\infty, M\}.$$

Si de plus $u_0 \not\equiv 0$, alors $u(t, x) > 0$ pour tout $t > 0$ et $x \in \Omega$. Dans le cas Neumann ou Robin, $u(t, x) > 0$ aussi pour $t > 0$ et $x \in \partial\Omega$.

Le fait que la solution devient immédiatement strictement positive partout, quel que soit la taille de Ω (ce sera aussi vrai dans des domaines non bornés, avec le même argument), est intéressant. Cela signifie que la population envahit instantanément l'ensemble du domaine, même si bien sûr, par continuité, la densité est petite pour t petit là où u_0 valait 0.

Cela peut être compris au vu de l'argument qui nous avait permis de justifier le choix du laplacien. Tout d'abord, ce choix suit un changement d'échelle : quel que soit $\tau > 0$, chaque individu s'est déplacé une infinité de fois dans l'intervalle de temps $[0, \tau]$. De plus, u est une densité renormalisée qui représente une infinité d'individus (ou plutôt, c'est une approximation valable lorsque le nombre d'individus est grand). On pourrait formellement considérer qu'une très faible valeur de u en un point (t, x) est en fait équivalente à l'absence d'individus au point (t, x) . En réalité les choses sont plus complexes car cette propriété du laplacien a une influence sur les solutions. Il faut garder en tête que c'est une approximation, et que pour améliorer cette approximation, on pourrait vouloir la modifier (par exemple remplacer l'équation de réaction-diffusion, lorsque u est proche de 0, par le modèle probabiliste mentionné précédemment).

Mentionnons enfin un dernier corollaire des principes de comparaison :

Proposition 3.1.5 Soient u_1 et u_2 respectivement les solutions des équations

$$\partial_t u_1 = D\Delta u_1 + f_1(t, x, u_1)$$

et

$$\partial_t u_2 = D\Delta u_2 + f_2(t, x, u_2)$$

avec mêmes condition au bord et condition initiale.

Si $f_1 \leq f_2$, alors $u_1(t, x) \leq u_2(t, x)$ pour tout $t > 0$ et $x \in \bar{\Omega}$.

Nous n'utiliserons peut-être pas directement ce théorème mais il peut être important pour comprendre l'intérêt de certains résultats plus bas. On verra en effet qu'on se concentrera sur certains cas : il n'est pas possible de mener une étude exhaustive, selon les conditions au bord et le choix de la fonction f . Néanmoins, le théorème ci-dessus permet d'imaginer que, lorsqu'on ne sait pas étudier une équation, il est parfois possible de l'encadrer par des équations "plus simples" et donc d'en déduire certaines propriétés sur les solutions.

En particulier, les fonctions f hétérogènes, i.e. qui dépendent de t et de x , sont souvent difficiles à étudier. Mais il est parfois possible d'encadrer une telle fonction par deux fonctions homogènes de propriétés similaires, et donc finalement de décrire le comportement asymptotique en temps grand de la solution.

3.2 Le cas homogène

Dans cette section, on suppose que

$$f(t, x, u) \equiv f(u).$$

En particulier, la fonction f pourra être choisie parmi les exemples vus au premier chapitre :

— f est monostable si

$$f > 0 \text{ in } (0, 1) \text{ et } f < 0 \text{ in } (-\infty, 0) \cup (1, +\infty);$$

— f est monostable KPP si f est monostable et de plus $u \mapsto \frac{f(u)}{u}$ est strictement décroissante. En particulier

$$f(u) \leq f'(0)u$$

pour tout $u \geq 0$.

— f est bistable s'il existe $\theta \in (0, 1)$ tel que

$$f > 0 \text{ in } (-\infty, 0) \cup (\theta, 1) \text{ et } f < 0 \text{ in } (0, \theta) \cup (1, +\infty).$$

Remark 3.2.1 En fait, d'après le principe comparaison, on pourrait ne définir f que pour les valeurs positives de u .

3.2.1 Condition au bord de Neumann

Theorem 3.2.2 *Soit f du type monostable et une donnée initiale $u_0 \geq \neq 0$.*

Alors la solution de l'équation de réaction-diffusion sur Ω borné et condition au bord de Neumann converge uniformément vers 1 quand $t \rightarrow +\infty$.

Proof. On a déjà vu que $u > 0$ pour tout temps strictement positif. En particulier

$$\inf_{\Omega} u(1, \cdot) > 0.$$

Soit ensuite \underline{u} la solution de l'équation différentielle

$$\partial_t \underline{u} = f(\underline{u})$$

et donnée initiale $\inf_{\Omega} u(1, \cdot)$, dont on sait qu'elle converge vers 1 quand $t \rightarrow +\infty$.

Par principe de comparaison,

$$u(t, x) \geq \underline{u}(t - 1)$$

pour tout $t > 1$. En particulier

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \inf_{x \in \Omega} u(t, x) \geq 1.$$

Par ailleurs, on peut prouver par comparaison avec la solution de l'EDO avec donnée initiale $\|u_0\|_{\infty} + 1$ que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \Omega} u(t, x) \leq 1,$$

ce qui conclut la preuve. ■

Ce résultat s'interprète facilement : la population persiste et converge vers la capacité maximale de l'environnement dans le cas monostable, ce qui est cohérent avec ce qu'on avait pour l'équation différentielle. Comme on le voit dans la preuve, cette propriété se transmet de l'EDO à l'EDP par de "simples" (tant qu'ils ont été prouvés plus tôt) principes de comparaison. De plus, cette persistance vaut pour n'importe quelle donnée initiale non triviale, aussi petite soit elle. On parle de **hair-trigger effect**.

Le théorème suivant se montre de la même manière

Theorem 3.2.3 *Soit $\theta_1 < \theta_2$ deux zéros successifs de f . On suppose sans perte de généralité que $f > 0$ sur (θ_1, θ_2) .*

Alors pour tout u_0 entre θ_1 et θ_2 , la solution de l'équation de réaction-diffusion avec condition de Neumann :

- *soit converge uniformément vers θ_2 quand $t \rightarrow +\infty$;*
- *soit est identiquement égale à θ_1 .*

Remark 3.2.4 *Si $f < 0$, la même conclusion est vraie en inversant θ_1 et θ_2 . On peut passer d'un cas à l'autre en posant $v = -u$.*

On a le corollaire suivant dans le cas bistable :

Theorem 3.2.5 *Soit f du type bistable et u_0 une donnée initiale.*

- *si $0 \leq u_0 \leq \theta$, alors $u \rightarrow 0$ uniformément ;*
- *si $\theta \leq u_0 \leq 1$, alors $u \rightarrow 1$ uniformément.*

Là encore le résultat s'interprète facilement et généralise ce qu'on a observé pour l'EDO. Dans le cas bistable, la survie d'une espèce dépend de si la donnée initiale est au-dessus du seuil ou non. Notons néanmoins que nous n'avons pas considéré toutes les données initiales possibles. Ce théorème sera donc (partiellement) complété plus bas.

Notons aussi, comme on l'aura mentionné plus haut, que dans le cas extinction la solution ne fait que converger vers 0. Elle reste malgré tout positive en temps fini.

Si u_0 n'oscille pas autour de l'état stable (disons 1), il est possible de montrer que la vitesse de la convergence est la même que pour l'EDO. En particulier, si $f'(1) < 0$ (i.e. 1 est linéairement stable), on a

$$Ae^{(f'(1)+\varepsilon)t} \leq |1 - u_0| \leq Be^{(f'(1)-\varepsilon)t}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, où $A, B > 0$.

Si u_0 oscille autour de l'état stable, alors la vitesse de convergence est au moins celle de l'EDO, mais elle peut aussi être plus rapide. Supposons par exemple que $\Omega = [-\pi, \pi]$, et que f est linéaire sur un voisinage de 1. Alors pour la donnée initiale

$$u_0 = 1 + \delta \cos x,$$

si δ est assez petit, alors la solution est

$$u(t, x) = 1 + \delta \cos x e^{(f'(1)-1)t}.$$

Cela peut être compris d'un point de vue systèmes dynamiques. L'équation linéaire admet une famille de vecteurs propres associées à des valeurs propres négatives. La plus grande valeur propre est associée à une fonction propre constante, et si on choisit une donnée initiale dont la composante associée à cette fonction propre est nulle, alors on peut "attraper" une vitesse de convergence plus rapide.

Jusqu'ici, on ne permet pas à u_0 d'osciller autour d'un état instable. On peut aisément comprendre que la situation est différente. Dans le cas bistable (on ne considérera pas le cas monostable car on interdit u_0 de prendre des valeurs négatives, même si l'analyse mathématique serait similaire), si u_0 oscille autour de θ , alors la solution pourrait être attirée à la fois par 0 et par 1.

Il s'avère que la situation est beaucoup plus complexe qu'on pourrait l'imaginer. Nous prouvons d'abord :

Theorem 3.2.6 *Soit f du type bistable et $u_0 \geq 0$ continue et bornée quelconque.*

Alors, à extraction d'une sous-suite près, la solution u converge uniformément vers un état stationnaire, i.e. une solution de

$$\Delta v + f(v) = 0.$$

Remark 3.2.7 *Comme il sera clair dans la preuve ci-dessous, l'énoncé est vrai pour toute non-linéarité $f(u)$ "raisonnable", et pas seulement dans le cas bistable.*

Proof. Tout d'abord, u est bornée uniformément en temps et espace, comme montré précédemment. En particulier, $f(u)$ est également uniformément bornée. D'après les estimations du chapitre précédent (estimations de Schauder; voir aussi la Remarque 2.4.10), on peut dans un premier temps en déduire que, pour tout $T > 0$,

$$\sup_{n \geq 0} \|u\|_{C^{0,\alpha}([n,n+T] \times \bar{\Omega})} \leq C,$$

où $C > 0$. Attention, on a appliqué le théorème non pas à une solution, mais à une famille de solutions. En effet, $u(t+n, x)$ peut être vue (par unicité) comme la solution de l'équation de réaction-diffusion avec donnée initiale $u(n-T, \cdot)$. Toujours d'après les estimations (jusqu'au bord) du chapitre précédent, on conclut que

$$\sup_{n \geq 0} \|\partial_t u\|_{C^{0,\alpha}([n,n+T] \times \bar{\Omega})} \leq C,$$

$$\sup_{n \geq 0} \|\partial_{x_i x_j} u\|_{C^{0,\alpha}([n,n+T] \times \bar{\Omega})} \leq C,$$

quitte à augmenter $C > 0$. Par compacité de $C^{0,\alpha}$ dans la topologie uniforme, on en déduit qu'on peut extraire une suite $\varphi(n)$ telle que $u(\varphi(n)+t, x)$ converge, ainsi que ses dérivées en temps et en espace, uniformément sur $[0, T] \times \bar{\Omega}$, vers une solution u_∞ de

$$\partial_t u_\infty = \Delta u_\infty + f(u_\infty).$$

Remark 3.2.8 *La propriété de compacité énoncée plus haut est une conséquence du théorème d'Arzela-Ascoli, qu'on pourra rappeler ici.*

Puisque T peut être choisi aussi grand qu'on le souhaite, par un procédé d'extraction diagonale (sans détailler, soit $T_n \rightarrow +\infty$, alors $u_{\varphi_0(n)}$ converge jusqu'à T_0 , puis $u_{\varphi_0(\varphi_1(n))}$ converge jusqu'à T_1 , etc... et finalement $u_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n(n)}$ convient), on obtient une suite qui converge localement uniformément sur $[0, +\infty) \times \bar{\Omega}$, vers une solution u_∞ qui est bien définie sur tout l'intervalle de temps $[0, +\infty)$. Il s'agit maintenant de montrer que u_∞ est un état stationnaire.

Pour cela, introduisons maintenant la fonction de Lyapunov suivante

$$G[u(\cdot)] = \int_{\Omega} \left(\frac{|\nabla u(x)|^2}{2} - F(u(x)) \right) dx,$$

où

$$F(u) := \int_0^u f(s) ds.$$

Soit ensuite la fonction

$$t \mapsto g(t) := G[u(t, x)]$$

où u est la solution de l'équation de réaction-diffusion avec condition au bord de Neumann et une donnée initiale u_0 continue et à valeurs entre 0 et 1.

Dans un premier temps, on suppose que g (et tout ce dont on aura besoin) est différentiable. Alors

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\partial_t \left(\int \frac{1}{2} u \Delta u + F(u) \right) \\ &= -\int \frac{1}{2} \partial_t u \Delta u + \frac{1}{2} u \partial_t \Delta u + \partial_t u f(u) \\ &= -\int \partial_t u \Delta u + \partial_t u f(u) \\ &= -\int |\partial_t u|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Pour rendre cela rigoureux, on peut calculer

$$\frac{g(t_1) - g(t_2)}{(t_1 - t_2)}$$

et passer à la limite. En effet le terme $\int F(u)$ est clairement différentiable, et pour l'autre on trouvera

$$\frac{\Delta u(t_1)(u(t_1) - u(t_2)) + \Delta u(t_2)(u(t_1) - u(t_2))}{t_1 - t_2}$$

ce qui nous fait ensuite bien tomber sur le même résultat qu'au-dessus.

Remark 3.2.9 *Dans ces calculs on a utilisé la formule de Green et la condition au bord de Neumann. Une condition au bord de Dirichlet donne le même résultat.*

Finalement, la fonction g est décroissante et de classe C^1 . De plus, on peut vérifier qu'elle est bornée par en-dessous, donc converge. Ayant déjà prouvé que u converge vers u_∞ , on peut en déduire que

$$t \mapsto G[u_\infty(t, \cdot)]$$

est constante. Avec le même calcul que plus haut,

$$\int |\partial_t u_\infty|^2 = 0$$

pour tout $t \geq 0$, d'où u_∞ est un état stationnaire. ■

Peut-on en dire plus en général? Pas vraiment. Le théorème précédent nous pousse à étudier plus précisément les états stationnaires, et nous laisse à penser que la solution converge (le plus souvent mais pas toujours) vers un état stable. On sait justement que 0 et 1 sont des états stables, mais il n'est pas trivial qu'il ne puisse pas en exister d'autres (c'est même faux en général). Ce "problème" se retrouve dans l'énoncé même du Théorème 3.2.6 : en effet, la seule conclusion est "à extraction d'une sous-suite près", et si $t_n \rightarrow \infty$ et $\tilde{t}_n \rightarrow \infty$ sont deux suites différentes alors il se pourrait a priori que $u(t_n, x) \rightarrow u_\infty(x)$ et $u(\tilde{t}_n, x) \rightarrow \tilde{u}_\infty(x)$ convergent vers deux états stationnaires différents!

Rappelons d'abord quelque définitions :

Definition 3.2.10 *On rappelle qu'un état p est **stable** si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \|u_0 - p\|_\infty \leq \delta \Rightarrow \|u(t) - p\|_\infty \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

*Un état est **asymptotiquement stable** si*

$$\exists \delta > 0, \quad \|u_0 - p\|_\infty \leq \delta \Rightarrow \|u(t) - p\|_\infty \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

Il est clair qu'un état asymptotiquement stable est stable.

Definition 3.2.11 *Lorsque les propriétés ci-dessus sont vraies pour $u_0 \geq p$ (resp. $u_0 \leq p$), on dit que p est (asymptotiquement) stable par au-dessus (resp. en-dessous).*

Theorem 3.2.12 *Soit une équation de réaction-diffusion bistable posée sur un intervalle $[-L, L]$ en dimension 1.*

Alors 0 et 1 sont les seuls états stables.

La preuve ci-dessous est assez complexe. Il existe un argument beaucoup plus rapide, qui fait intervenir des outils d'une section suivante, et qu'on ne décrit ici que brièvement. La notion de stabilité asymptotique est liée à la notion de stabilité linéaire (comme on l'avait vu pour les équations différentielles). On peut montrer que tout état stationnaire p entre 0 et 1, autre que θ (qu'on sait déjà être instable), est linéairement instable.

Pour cela il suffit d'observer que la dérivée p' (qui est non triviale puisque p ne peut pas être constant) est fonction propre du problème linéarisé en p , avec condition au bord de Dirichlet. Ce qu'on entend par problème linéarisé n'est pas évident : on renvoie ici à la section sur les problèmes hétérogènes. Plus précisément, la valeur propre associée à p est 0. Bien que le problème linéarisé pertinent soit celui accompagné d'une condition au bord de Neumann, la condition au bord de Dirichlet nous permet d'appliquer un principe du maximum et de conclure que la valeur propre principale (là encore, on réfère à la section suivante) est strictement positive : autrement dit, p est bien linéairement instable.

On peut remarquer que cet argument utilise fortement la condition au bord de Neumann. C'est compréhensible puisque le théorème est faux en général avec

une condition au bord de Dirichlet. De plus, l'instabilité linéaire est une propriété assez forte. On pourrait par exemple en déduire que si une donnée initiale est telle que la solution tend vers p quand $t \rightarrow +\infty$, alors toute donnée initiale plus grande est telle que la solution tend vers 1. Ce qui confirme les commentaires (plus bas après la preuve suivante) comme quoi la convergence vers p ne peut se produire qu'exceptionnellement.

Revenons maintenant à une preuve qui elle est accessible à ce stade. Tout d'abord, introduisons un lemme qui découle facilement du Théorème 3.2.3 ci-dessus.

Lemma 3.2.13 *Il n'existe aucun état stationnaire $\theta \leq p \leq 1$ autre que θ et 1. De même, il n'existe aucun état stationnaire entre 0 et θ autre que 0 et θ .*

Proof. On ne traite que le cas d'un état entre θ et 1, le cas d'un état entre 0 et θ est identique. Soit $\theta \leq p(x) \leq 1$ un état stationnaire. Par le principe fort, soit $p \equiv \theta$, soit $p \equiv 1$, soit $\theta < p(x) < 1$ dans $\bar{\Omega}$. Les deux premiers cas sont exclus, et dans le troisième cas on peut glisser une constante sous p , i-e $\theta + \varepsilon \leq p(x)$ pour tout x et $\varepsilon > 0$ assez petit. Mais on sait que la solution de l'EDO issue de $\theta + \varepsilon \in (\theta, 1)$ converge en croissant vers 1, donc par principe de comparaison la solution issue de $p(x)$, qui n'est autre que l'état stationnaire $p(x)$ lui-même, converge vers 1. Ceci contredit $p(x) < 1$. ■

Ce lemme va nous être utile dans la preuve du théorème.

Preuve du théorème 3.2.12. Supposons par contradiction qu'il existe un autre état stable entre 0 et 1, que l'on note p . Dans un premier temps, on suppose que p est aussi asymptotiquement stable.

Alors on peut montrer que l'ensemble des données initiales $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ qui convergent vers p est un ouvert. En effet, soit u_0 une telle donnée initiale. Alors il existe T tel que

$$\|u(T, \cdot) - p(\cdot)\|_\infty \leq \frac{\delta}{2}$$

où δ provient de la définition de la stabilité asymptotique. Alors il existe ε tel que, pour tout v_0 et $\|v_0 - u_0\| \leq \varepsilon$, on a $\|v(T, \cdot) - u(T, \cdot)\|_\infty \leq \frac{\delta}{2}$. On sait en effet que les solutions de l'équation de réaction-diffusion dépendent continument de la donnée initiale (c'est une conséquence du principe de comparaison, comme on l'a vu au chapitre précédent). Il s'ensuit que $v \rightarrow p$ quand $t \rightarrow +\infty$.

De même, l'ensemble des données initiales telles que la solution converge vers 0 est ouvert. On considère ensuite une famille ordonnée $u_{0,\lambda}$ de données initiales, continue dans la topologie uniforme par rapport à λ , telle que $u_{0,0} = 0$ et $u_{0,1} = p$. On note u_λ la famille de solutions qui correspond, qui est également ordonnée et, pour tout t et x ,

$$0 \leq u_{0,\lambda}(t, x) \leq p(x).$$

Clairement, il existe $0 < \lambda_* \leq \lambda^* < 1$ tels que

$$\{\lambda \in (0, 1] \mid u_\lambda \rightarrow 0\} = [0, \lambda_*)$$

$$\{\lambda \in [0, 1] \mid u_\lambda \rightarrow p\} = (\lambda^*, 1]$$

Ces ensembles sont des ouverts de $[0, 1]$ d'après la discussion qui précède. De plus ce sont des intervalles par monotonie en λ , car les conditions initiales $u_{0,\lambda}$ sont ordonnées et donc les solutions correspondantes le sont aussi d'après le principe de comparaison). On choisit ensuite $\lambda \in [\lambda_*, \lambda^*]$ (cet intervalle étant possiblement un singleton). Alors u_λ ne converge ni vers 0, ni vers p . Donc, à extraction d'une sous-suite près, cette solution converge vers un nouvel état stationnaire q tel que $0 < q < p$.

Il existe alors $z \in \mathbb{R}$ tel que

$$q(\cdot - z) \leq p(\cdot) \text{ et } q(x_0 - z) = p(x_0)$$

pour un $x_0 \in [-L + z, L]$. En effet, il est clair d'après le lemme plus haut que

$$\min q < \theta < \max q \quad , \quad \min p < \theta < \max p.$$

Par conséquent, en translatant q petit à petit vers la gauche ou la droite (mais pas forcément dans les deux directions), on obtient un tel z qui est le premier pour lequel il existe un point de contact. Sans perte de généralité (par symétrie), on suppose que $z > 0$, ce qui revient à translater q vers la droite. Si le point de contact a lieu dans l'intervalle $(-L + z, L)$, alors on peut appliquer le principe du maximum et conclure que

$$q(\cdot - z) \equiv p(\cdot)$$

dans l'intervalle $[-L + z, L]$ (en effet $q \leq p$ au bord donc le principe fort s'applique). Si $x_0 = L$, alors $\partial_x q(L - z) = 0$, sinon cela contredirait le choix de z . On peut donc appliquer de nouveau un principe fort (en fait le lemme de Hopf), de sorte qu'à nouveau $q(\cdot - z) \equiv p(\cdot)$. Enfin, si $x_0 = -L + z$, on a cette fois-ci $\partial_x p(-L + z) = 0$ et on parvient à la même conclusion.

Alors $\partial_x p(-L + z) = \partial_x q(-L) = 0$. Autrement dit, p satisfait l'équation de réaction-diffusion sur $[-L, L + z]$ avec condition au bord de Neumann. Remarquons d'abord que, pour tout $x \in (-L, -L + z)$, $p(x) > q(-L) = p(-L + z)$: autrement cela contredirait le choix de z . En particulier il est impossible que $p(-L + z) > \theta$, car cela contredirait le lemme plus haut sur l'inexistence d'états non triviaux entre θ et 1. Donc $p(-L + z) \leq \theta$.

Supposons ensuite que $p(-L + z) = \theta$. Le lemme de Hopf implique alors que $p \equiv \theta$, ce qui contredit notre hypothèse que p est stable. Finalement, supposons que $p(-L + z) < \theta$. Alors, toujours d'après notre choix de z , on a que $q(-L) = p(-L + z) < \theta$ et $q(\cdot) < q(-L)$ sur $(-L, -L + z)$. Alors $q < \theta$ sur $(-L, z')$ où z' est le premier point (éventuellement égal à L) où la dérivée de q s'annule. Cette fois, on a construit un état stationnaire de l'équation avec condition au bord de Neumann (éventuellement sur un sous-intervalle) entre 0 et θ , ce qui contredit encore le lemme plus haut. Tous les cas nous ont menés à une contradiction.

Finalement, on peut bien conclure que p n'est pas asymptotiquement stable. En fait, on a montré qu'entre deux états asymptotiquement stables, il existe un autre état stationnaire, et qu'en dimension 1 (la dimension 1 est importante ici)

c'est impossible dans le cas bistable.

Il reste à étendre la preuve au cas où p est seulement stable. Soit $u_0 < p$ une donnée initiale telle que $\|u_0 - p\|_\infty \leq \delta$, où δ provient de la définition de la stabilité de p . A extraction d'une sous-suite près, la solution converge vers un état stationnaire $q \leq p$ tel que $\|q - p\|_\infty \leq \varepsilon$. Si $q < p$, alors le raisonnement plus haut aboutit à une contradiction. Donc $q \equiv p$ et, par principe de comparaison, p est stable par en-dessous. De même on peut montrer que p est asymptotiquement stable par au-dessus. On est donc ramenés au cas précédent et le théorème est démontré. ■

Moralement, on imagine que la convergence en temps long dans le Théorème 3.2.6 plus haut devrait se faire vers un état stable. Ce n'est pas vrai en général, il est possible de converger vers un état instable (non stable) lorsqu'il existe : un cas trivial est la solution identiquement égale à cet état instable, mais il en existe d'autres. Néanmoins, la convergence vers un état instable est un événement rare (on ne donnera pas plus de détails), c'est pourquoi il est utile de répertorier les états stables.

Remark 3.2.14 *On serait tenté de penser qu'il n'existe pas d'autre état instable que θ . Mais c'est faux en général, même en dimension 1 ! Il est facile de le voir sur l'exemple suivant : supposons que $\Omega = [-\pi, \pi]$ et que $f(u) = u - \theta$ sur un voisinage de θ .*

Alors il existe des états stationnaires du type

$$\theta + \delta \cos x$$

pour δ suffisamment petit, qui d'après le théorème précédent ne sont pas stables.

La conclusion à laquelle on parvient, même si elle n'est que formelle, est qu'en dimension 1 et sauf pour de rares conditions initiales, la solution doit tendre soit vers 1 (persistance de la population) soit vers 0 (extinction).

En dimension quelconque, et selon la géométrie du domaine, cela n'est plus vrai ! Un contre-exemple est en effet connu. Soit un domaine constitué de deux boules B_1 et B_2 reliées par un passage étroit. Alors, sous certaines conditions géométriques, il existe deux états stables p_i ($i = 1, 2$), chacun étant supérieur à θ dans B_i et inférieur à θ dans l'autre boule.

De plus, chacun de ces états attirent bien de nombreuses conditions initiales : si la donnée initiale est supérieure à θ dans B_1 et inférieure dans B_2 , elle ne va tendre ni vers 1, ni vers 0 mais vers p_1 . Si la donnée initiale est supérieure à θ dans les deux boules, elle va tendre vers 1 et si elle est inférieure dans les deux boules, elle va tendre vers 0. Moralement (et cette interprétation a un sens biologique), lorsque le passage est trop étroit entre les deux environnements que sont B_1 et B_2 , trop peu d'individus parviennent à passer de l'un à l'autre. En quelque sorte, la population de chaque boule se comporte indépendamment de l'autre. Pour une équation monostable, le problème ne se pose pas puisque chaque population est capable de se développer d'elle-même.

La preuve fait appel à une construction un peu particulière de sur et sous-solutions, c'est pourquoi on l'omet ici. On souhaite juste souligner la difficulté de la classification des états stables, même pour des équations assez simples.

3.2.2 Condition au bord de Dirichlet

Ce cas là est bien différent du cas Neumann. En effet, les zéros de f (autres que 0) ne sont plus des états stationnaires mais seulement des sur-solutions, puisqu'ils ne satisfont pas la condition au bord. De plus, il n'est plus possible de comparer les solutions de l'EDP avec celles de l'EDO associée : même si toute solution non triviale est instantanément positive dans Ω , son infimum lui est bien 0 du fait de la condition de Dirichlet sur $\partial\Omega$.

Cela signifie-t-il que le comportement des autres solutions va aussi être différent du cas Neumann ? D'après l'interprétation de la condition au bord de Dirichlet, on peut imaginer que oui. Nous allons voir que même dans le cas monostable, la survie de l'espèce n'est pas garantie :

Theorem 3.2.15 *Soit $f \in C^1$ telle que $f(0) = 0$, $f(u) < 0$ pour tout $u > 1$.*

Alors il existe $R > 0$ tel que, si $\Omega \subset B_R$ et pour la condition au bord de Dirichlet, quelle que soit la donnée initiale $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ on a que $u(t, x) \rightarrow 0$ uniformément.

On peut réduire R sans perte de généralité dans ce théorème, et il faut donc l'imaginer petit. En particulier, dans un premier temps on peut comprendre ce résultat ainsi : "si le domaine est trop petit, alors l'espèce s'éteint". En fait il ne s'agit pas vraiment de la "taille" du domaine, mais de savoir si tous les points de Ω sont proches du bord, comme on y reviendra plus loin.

Proof. Tout d'abord, les solutions positives de l'équation différentielle $u' = f(u)$ sont sur-solutions de l'équation de réaction-diffusion avec condition au bord de Dirichlet. En particulier, il est clair que pour toute donnée initiale bornée, il existe $T > 0$ tel que

$$\max u(T, \cdot) < 2.$$

On pourrait bien sûr prendre n'importe quel nombre supérieur à 1 à la place de 2. L'important est ici d'avoir une borne supérieure commune à toutes les solutions (même si le temps T lui dépend bien de la donnée initiale et pourrait être très grand).

Construisons ensuite une sursolution qui, au temps 0, est supérieure à 2. On rappelle que $R > 0$ est tel que $\Omega \subset B_R$. On pose

$$\bar{u}(t, x) = 10e^{-t} \cos\left(\frac{\pi}{4R}x_1\right).$$

On a bien

$$\bar{u}(0, x) \geq 10 \cos(\pi/4) \geq 2 \quad \text{dans } \bar{\Omega},$$

et

$$\bar{u}(t, x) \geq 2e^{-t} \geq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Par hypothèse sur la non-linéarité f on peut choisir une énorme constante $K > 0$ telle que $f(u) \leq Ku$ pour tout $u \geq 0$. On a donc enfin, pour tout $t > 0$ et $x \in \bar{\Omega}$,

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{u} - \Delta \bar{u} - f(\bar{u}) &\geq \partial_t \bar{u} - \Delta \bar{u} - K\bar{u} \\ &= 10e^{-t} \cos\left(\frac{\pi}{4R}x_1\right) \left[-1 + \frac{\pi^2}{16R^2} - K\right] \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient du fait que si $R \ll 1$ le terme positif en $1/R^2$ l'emporte sur les deux autres. Si R est assez petit, alors \bar{u} est bien une sur-solution. Par principe de comparaison, on en déduit que, pour toute donnée initiale, il existe $T > 0$ tel que la solution satisfait

$$u(t + T, x) \leq \bar{u}(t, x)$$

pour tout $t > 0$ et $x \in \bar{\Omega}$. On conclut que $u \rightarrow 0$ uniformément (et même exponentiellement en temps!). ■

Même dans le cas monostable, il n'y a en général pas de hair-trigger effect lorsque la condition au bord est de type Dirichlet. Plus précisément, le résultat précédent montre que le problème se pose lorsque le domaine est trop petit. Cela peut facilement s'interpréter : la frontière du domaine est extrêmement défavorable (puisque $u|_{\partial\Omega} = 0$ la population n'a pas le droit de se développer au bord), il vaut donc mieux que l'intérieur du domaine soit "grand" en un certain sens pour que la population puisse se tenir à une distance suffisante de cette frontière.

Remark 3.2.16 *Si l'on regarde bien la preuve ci-dessus, le critère décisif n'est pas la taille du domaine Ω , puisqu'on a seulement utilisé le fait que $\Omega \subset [-R, R] \times \mathbb{R}^{N-1}$ (qui est de mesure infinie donc pas particulièrement petit!). Il faut donc plutôt comprendre, de manière cohérente avec l'interprétation qui précède, que c'est la taille du sous-ensemble de Ω constitué des points "éloignés" de la frontière qui est important. Dans la preuve ci-dessus c'est bien le fait que $[-R, R] \times \mathbb{R}^{N-1}$ était suffisamment fin qui a permis de conclure, en particulier tous les points étaient au plus à distance R (petite) du bord, donc proches de la frontière défavorable.*

Selon cette interprétation, au plus le domaine est "grand", au plus les chances de survie de l'espèce sont grandes également. Ce résultat est une conséquence immédiate d'un principe de comparaison :

Theorem 3.2.17 *Soient $\Omega_1 \subset \Omega_2$ et u_0 une donnée initiale continue et bornée, qui vaut 0 dans $\Omega_2 \setminus \Omega_1$. On note u^1 et u^2 les solutions associées à la condition initiale u_0 pour chacun des problèmes posés dans Ω_1 et Ω_2 avec condition au bord de Dirichlet (sur $\partial\Omega_1$ pour u^1 et sur $\partial\Omega_2$ pour u^2 , donc).*

Alors $u^1 \leq u^2$ pour tout $t > 0$ et $x \in \bar{\Omega}_1$. En particulier, si $u^2 \rightarrow 0$, alors $u^1 \rightarrow 0$; et bien sûr par contraposée, si u^1 survit i.e. ne converge pas vers 0 en temps grand, alors u^2 survit également.

Proof. En appliquant le principe de comparaison à u^2 sur Ω_2 on a d'abord que $u^2 \geq 0$ partout, en particulier sur $\partial\Omega_1 \subset \overline{\Omega_2}$. Il suffit ensuite de comparer (la restriction à Ω_1 de) u^2 et u^1 , vues respectivement comme sur-solution et solution de l'équation de réaction-diffusion posée dans Ω_1 , avec condition au bord de Dirichlet et même donnée initiale. ■

Il reste néanmoins à montrer que, lorsque le domaine est suffisamment grand, la population survit effectivement. On se concentre d'abord sur le cas monostable KPP, qui est le plus simple et dans lequel on peut obtenir plus d'informations.

Theorem 3.2.18 *Soit f du type monostable KPP, i.e. monostable et $f(u)/u$ décroît strictement (en particulier $f'(0) > 0$). Alors il existe $R > 0$ tel que, si $B_R \subset \Omega$, on a pour le problème avec condition au bord de Dirichlet que :*

- *il existe un unique état stationnaire positif p , qui vérifie de plus $0 < p(x) < 1$ dans Ω ;*
- *pour toute donnée initiale continue, bornée et non identiquement nulle, la solution converge uniformément vers p .*

Ce théorème est (entre autres) un résultat de persistance : en effet la donnée initiale peut être arbitrairement petite, la solution convergera toujours vers l'état stationnaire positif. Comme on l'a fait plus haut, on parle aussi de “hair-trigger”. Par opposition au Théorème 3.2.15 sur l'extinction, dans lequel il fallait lire “pour tout R assez petit”, il faut ici lire “pour tout R assez grand” afin de garantir la persistance.

Proof. La preuve est séparée en plusieurs parties. Tout d'abord, montrons l'unicité, mais pas l'existence, de l'état stationnaire positif.

Unicité de l'état stationnaire : Soient p_1 et p_2 deux états stationnaires positifs. Par continuité et puisque Ω est borné, ces deux états sont bornés. De plus, par le lemme de Hopf vu au chapitre précédent, pour tout $x \in \partial\Omega$,

$$\partial_n p_1(x), \partial_n p_2(x) < 0.$$

De nouveau par continuité,

$$\sup_{x \in \partial\Omega} \max\{\partial_n p_1(x), \partial_n p_2(x)\} < 0.$$

On peut en déduire qu'il existe $\theta > 0$ assez grand tel que

$$\theta p_1 > p_2$$

dans Ω . Soit ensuite

$$\theta^* = \inf\{\theta > 0 \mid \theta p_1 > p_2\}.$$

Par le même argument que ci-dessus on a $\theta^* > 0$ strictement, et par continuité on a

$$\theta^* p_1(x) \geq p_2(x) \quad \text{dans } \overline{\Omega}$$

et on a soit un point de contact intérieur

$$\theta^* p_1(x_0) = p_2(x_0), \quad x_0 \in \Omega,$$

soit un contact d'ordre un sur la frontière

$$\partial_n \theta^* p_1(x_0) = \partial_n p_2(x_0), \quad x_0 \in \partial\Omega.$$

Supposons sans perte de généralité que $\theta^* \geq 1$ (sinon, il suffit d'inverser p_1 et p_2). Alors $\theta^* p_1$ satisfait

$$\begin{aligned} & \partial_t \theta^* p_1 - \Delta \theta^* p_1 - f(\theta^* p_1) \\ & \geq 0 - \theta^* \Delta p_1 - \theta^* f(p_1) \\ & \geq 0, \end{aligned}$$

où on a utilisé la décroissance de $u \mapsto \frac{f(u)}{u}$ pour écrire $f(\theta^* p_1) \leq \theta^* f(p_1)$ dans la première inégalité. Donc $\theta^* p_1$ est sur-solution (elle vérifie bien sûr la condition de Dirichlet au bord). Que le point de contact x_0 soit à l'intérieur ou au bord, on peut appliquer soit le principe de comparaison fort soit le lemme de Hopf pour conclure que

$$\theta^* p_1 \equiv p_2.$$

Mais en répétant le calcul plus haut et en utilisant la décroissance stricte de $f(u)/u$, on observe que $\theta^* p_1$ n'est solution que si $\theta^* = 1$. Finalement $p_1 \equiv p_2$.

Existence d'une solution stationnaire positive : L'argument ci-dessous servira en fait aussi pour la convergence. Nous allons en effet construire une sous-solution du problème dans Ω avec condition de Dirichlet. Le calcul est un peu similaire au théorème plus haut mais est plus subtil, d'une part parce qu'on ne peut pas réduire à une dimension comme on l'avait fait, mais aussi parce qu'il est plus délicat de traiter la nonlinéarité.

Pour présenter l'idée, considérons d'abord le cas linéaire en dimension $N = 1$, i.e. avec $\Omega \subset \mathbb{R}$ et $f(u) = f'(0)u$ (ce qui n'est bien sûr plus monostable KPP). Soit alors

$$\underline{u}_0(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2R}x\right).$$

Alors

$$\partial_t \underline{u}_0 - \Delta \underline{u}_0 - f'(0)\underline{u}_0 = \left(\frac{\pi^2}{4R^2} - f'(0)\right) \underline{u}_0 < 0$$

si R est assez grand, de manière similaire au calcul plus haut. Si $(-R, R) = \Omega$, c'est donc une sous-solution. En particulier, si \underline{u} est solution de l'équation linéaire avec donnée initiale \underline{u}_0 , on a pour tout $t > 0$ que

$$\underline{u}(t, \cdot) \geq \underline{u}_0(\cdot).$$

En appliquant de nouveau un principe de comparaison, on peut aussi en déduire que \underline{u} est croissante en temps (un argument similaire avait été évoqué au premier chapitre).

En effet, pour tout $t \geq 0$ on a dans un premier temps que $\underline{u}(t, \cdot) \geq \underline{u}_0(\cdot)$, puisque \underline{u}_0 est sous-solution. Soit ensuite $h \geq 0$ fixé : en voyant $\tilde{\underline{u}}(t) := \underline{u}(t+h)$ comme la solution du problème de Cauchy issue de la condition initiale $\tilde{\underline{u}}(0) \equiv \underline{u}(h)$, et comme on vient de montrer que $\underline{u}(h, \cdot) \geq \underline{u}(0, \cdot) = \underline{u}_0(\cdot)$, on a des données initiales ordonnées $\tilde{\underline{u}}(0, \cdot) \geq \underline{u}(0, \cdot)$. Par principe de comparaison on en déduit que $\tilde{\underline{u}}(t, \cdot) \geq \underline{u}(t, \cdot)$ pour tout $t, h \geq 0$, ce qui signifie que $\underline{u}(t+h, \cdot) \geq \underline{u}(t, \cdot)$ et donc \underline{u} est bien croissante en temps. .

Ce n'est pas le cas ici mais s'il existait un état stationnaire positif, ou même une sur-solution bornée, on pourrait borner \underline{u} par au-dessus et forcer cette solution à converger.

Revenons donc maintenant au cas monostable KPP et multidimensionnel. Quitte à agrandir un peu le rayon de la boule incluse dans Ω , on peut supposer que le pavé $P_R = [-R, R]^N \subset \Omega$. On définit alors

$$\underline{u}_0(x) = \delta \cos\left(\frac{\pi}{2R}x_1\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{\pi}{2R}x_N\right),$$

qui s'annule bien sûr au bord ∂P_R . En utilisant la relation élémentaire

$$\partial_{x_i}^2 \cos\left(\frac{\pi}{2R}x_i\right) = -\frac{\pi^2}{4R^2} \cos\left(\frac{\pi}{2R}x_i\right),$$

on calcule facilement

$$\Delta \underline{u}_0(x) = -N \frac{\pi^2}{4R^2} \underline{u}_0(x).$$

Comme $\underline{u}_0(x) \leq \delta$ et f est C^1 , en choisissant $\delta < 1$ assez petit on a ensuite

$$\begin{aligned} \partial_i \underline{u}_0 - \Delta \underline{u}_0 - f(\underline{u}_0) &\leq 0 - \Delta \underline{u}_0 - \frac{f'(0)}{2} \underline{u}_0 \\ &\leq \left[N \frac{\pi^2}{4R^2} - \frac{f'(0)}{2} \right] \underline{u}_0 \\ &\leq -\frac{f'(0)}{4} \underline{u}_0 < 0 \end{aligned}$$

pour $R > 0$ assez grand (le terme $N \frac{\pi^2}{4R^2}$ peut être rendu aussi petit que voulu, en particulier plus petit que $f'(0)/4$).

Donc \underline{u}_0 est sous-solution sur le domaine P_R . On étend maintenant \underline{u}_0 par 0 dans $\bar{\Omega} \setminus P_R$, et on note \underline{u} la solution associée pour l'équation de réaction-diffusion posée dans Ω . Par le principe de comparaison sur P_R , il est clair que $\underline{u}(t, \cdot) \geq \underline{u}_0(\cdot)$ dans P_R , donc dans Ω , pour tout $t > 0$.

Remark 3.2.19 *Une remarque s'impose ici : la frontière du pavé n'est évidemment pas régulière, comme on l'avait pourtant supposé au chapitre précédent. Néanmoins, il est facile de vérifier que le principe de comparaison s'applique toujours lorsque la condition au bord est de type Dirichlet (si une sous-solution "rattrape" une sur-solution, c'est forcément à l'intérieur du domaine et on peut alors se ramener au cas où le domaine est une boule). Au contraire lorsque la condition au bord est de type Neumann (ou Robin), la régularité du bord intervenait clairement dans la preuve du lemme de Hopf.*

En procédant comme précédemment, une nouvelle utilisation du principe de comparaison implique que \underline{u} est croissante en temps. De plus $\underline{u}(t, x) \leq 1$, car 1 est une sur-solution de l'équation avec condition de Dirichlet. On peut donc en déduire que \underline{u} converge simplement vers une fonction $p(x) \leq 1$ pour $t \rightarrow \infty$.

Il découle ensuite des estimations paraboliques du chapitre précédent que p est une solution stationnaire. En effet, pour toute suite $t_n \rightarrow \infty$ et à extraction d'une sous-suite près, on a que $\underline{u}^n(t, x) = \underline{u}(t_n + t, x)$ converge uniformément sur $[0, T] \times \bar{\Omega}$ (pour tout $T > 0$), ainsi que ses dérivées. On rappelle que les estimations s'appliquent en deux temps : \underline{u}^n est uniformément bornée, donc $f(\underline{u}^n)$ l'est aussi, et une première estimation (voir Schauder et remarque 2.4.10) nous dit que \underline{u}^n est uniformément bornée dans $C^{0,\alpha}$. On peut ensuite appliquer la seconde estimation Hölder qui nous dit que les dérivées de \underline{u}^n sont également $C^{0,\alpha}$. En appliquant le théorème d'Ascoli-Arzelà, on obtient (à extraction d'une sous-suite $\varphi(n) \rightarrow \infty$ près) que $\underline{u}_n \rightarrow \underline{u}_\infty$ uniformément localement en temps, c'est-à-dire uniformément sur tout compact fixé $[0, T] \times \bar{\Omega}$, et comme les dérivées convergent également on sait que \underline{u}_∞ est solution du problème. Remarquons qu'ici il n'est pas nécessaire de prendre un intervalle de temps $[\tau, T]$ avec $\tau > 0$, puisqu'on regarde déjà la solution pour des temps grands donc strictement positifs. Pour tout $t \geq 0$, et comme on savait déjà que $\underline{u}(t, x) \rightarrow p(x)$ pour $t \rightarrow \infty$, on a donc $\underline{u}_\infty(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{u}^n(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{u}(t + t_n, x) = p(x)$, et on conclut bien que $p(x)$ est solution stationnaire. On remarque également que par construction on avait $0 \leq \underline{u}_0(x) \leq \underline{u}(t, x) \leq 1$, donc par passage à la limite $t \rightarrow \infty$ on a $\underline{u}_0(x) \leq p(x) \leq 1$. Comme $\underline{u}_0 \not\equiv 0$ on ne peut pas avoir $p \equiv 0$, donc le principe du maximum fort donne $0 < p(x)$ dans Ω . De même, comme $p|_{\partial\Omega} = 0$ on ne peut pas avoir $p \equiv 1$, donc $p < 1$ dans Ω (et même dans $\bar{\Omega}$).

Conclusion de la preuve : On a montré l'existence d'un unique état stationnaire positif p . On a également montré, même si c'était implicite, que certaines solutions convergent vers cet état stationnaire positif : il suffit de choisir la donnée initiale entre \underline{u}_0 et p . Pour montrer que cette convergence est en fait vraie pour toute donnée initiale, il suffit d'utiliser un principe du maximum fort et de choisir $\delta > 0$ suffisamment petit dans la définition de \underline{u}_0 .

Plus précisément, le principe du maximum fort donne que la solution $u(t, x)$ issue d'une donnée initiale $u_0(x) \geq 0$ arbitraire vérifie $u(t_0, x) > 0$ dans Ω pour tout $t_0 > 0$ fixé, donc par continuité $u(t_0, x) \geq \delta > 0$ dans le compact \bar{P}_R pour une certaine constante $\delta > 0$. La sous-solution construite ci-dessus, qui est justement plus petite que δ , permet de glisser dessous $\underline{u}_0(x) \leq \delta \leq u(t_0, x)$ pour tout $x \in \Omega$, et par comparaison $\underline{u}_0(x) \leq \underline{u}(t, x) \leq u(t + t_0, x)$ pour tout $t \geq 0$. Comme on l'a montré précédemment, la solution \underline{u} converge en temps grand vers l'unique solution stationnaire p , et on en déduit alors que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \inf_{x \in \Omega} u(t, x) - p(x) \geq 0.$$

D'autre part, soit $M > \max\{\|u_0\|_\infty, 1\}$, qui est une sur-solution de l'équation de réaction-diffusion dans Ω avec la condition au bord de Dirichlet. Avec un argument symétrique à celui ci-dessus, la solution \bar{u} associée à la donnée initiale M

décroit en temps donc converge vers une solution stationnaire q (éventuellement la solution nulle). Puisque $M \geq \underline{u}_0$, on a que $\bar{u}(t, \cdot) \geq \underline{u}_0$ pour tout temps positif, et en passant à la limite $q \geq \underline{u}_0$ est non triviale. Par conséquent $q \equiv p$ l'unique solution stationnaire.

Enfin, puisque $u_0 \leq M$, une dernière application du principe du maximum nous dit que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \Omega} u(t, x) - p(x) \leq 0.$$

Par conséquent u converge uniformément vers p .

Une méthode alternative consisterait à utiliser la même fonction de Lyapunov qu'on avait utilisé pour l'équation bistable avec condition au bord de type Neumann (qui fonctionne également pour d'autres nonlinéarités et une condition au bord de type Dirichlet). Cette fonction garantit que toute sous-suite convergente $u(t_n, \cdot)$ converge vers une solution stationnaire. Ici, comme on a une borne uniforme $u(t, x) \leq \max\{\|u_0\|_\infty, 1\}$, les estimations paraboliques permettent d'extraire une suite de temps $t_n \rightarrow \infty$ telle que $u(t_n, x) \rightarrow u_\infty(x)$ uniformément dans Ω , avec u_∞ une solution stationnaire. Comme plus haut, on peut choisir δ assez petit de sorte que $u_\infty(x) \geq \underline{u}_0(x)$. Par unicité des états stationnaires $u_\infty = p$ on conclut qu'en fait cette convergence a lieu pour toute suite $t_n \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que $u(t, \cdot) \rightarrow p(\cdot)$ pour $t \rightarrow \infty$.

Dans tous les cas, on s'est servi de la sous-solution \underline{u}_0 pour garantir que $u_\infty(x) = \lim u(t_n, x)$ était non triviale, ce qui aurait pu arriver a priori en sachant uniquement que u_∞ était une solution stationnaire (zéro étant bien sûr un état stationnaire!). ■

Finalement on sait, au moins dans le cas monostable KPP, comment se comportent les solutions quand le domaine est "grand", et quand il est "petit" (on insiste encore sur le fait que le Théorème 3.2.18 de persistance ne s'applique qu'au cas monostable KPP). Nos résultats ne sont cependant pas généraux et la question des domaines "ni grands ni petits" reste ouverte à ce stade du cours, même pour le cas KPP. Grossièrement, les arguments ci-dessus sont limités par le fait qu'on a construit les sur et sous-solutions de manière explicite sur des domaines particuliers. Il existe néanmoins des outils plus abstraits qui permettent de traiter le cas général. Le théorème suivant est un cas particulier du cas hétérogène qu'on considèrera dans la section suivante, et on l'admet donc à ce stade :

Theorem 3.2.20 *Sous les hypothèses plus haut, on considère le cas d'une équation de réaction-diffusion avec f monostable KPP, dans un domaine Ω borné et avec une condition au bord de type Dirichlet.*

Alors l'un des deux énoncés suivant est vrai :

- *il n'existe aucun état stationnaire positif, et toutes les solutions convergent uniformément vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$;*
- *il existe un unique état stationnaire positif p , et toutes les solutions non triviales (i.e. non identiquement nulles) convergent uniformément vers p*

quand $t \rightarrow +\infty$.

Le critère qui déterminera laquelle des deux alternatives ci-dessus a lieu est le signe de la valeur propre principale du problème linéarisé en $u = 0$.

Dans le cas bistable, il est aussi possible de montrer le théorème ci-dessous :

Theorem 3.2.21 *Sous les hypothèses plus haut, on considère le cas d'une équation de réaction-diffusion bistable, dans un domaine Ω borné avec condition au bord de Dirichlet. On suppose de plus que*

$$\int_0^1 f(s)ds > 0.$$

Alors il existe $R > 0$ tel que, si $B_R \subset \Omega$, les solutions associées à certaines données initiales convergent vers un état stationnaire positif.

Remarquons que, comme dans le cas Neumann, on ne peut pas espérer l'unicité de l'état stationnaire positif dans le cas bistable. Discutons rapidement l'hypothèse de positivité de l'intégrale de f . Grossièrement, la partie positive de f est plus importante que sa partie négative : si l'on regarde l'EDO, cela signifie que l'état 1 est en un certain sens plus stable que ne l'est 0. On donnera seulement un plan de la preuve en dimension d'espace $N = 1$ (mais le résultat est bien sûr valable en dimension quelconque). Des arguments similaires seront utilisés dans un chapitre suivant et on pourra éventuellement revenir alors à ce résultat.

Preuve en dimension $N = 1$. On regarde la solution de l'EDO

$$\begin{cases} p''(r) + f(p(r)) = 0, & r \geq 0 \\ p(0) = \gamma, \\ p'(0) = 0, \end{cases}$$

où $' = \frac{d}{dr}$ et le paramètre $\gamma \in (\theta, 1)$ est choisi tel que

$$\int_0^\gamma f > 0.$$

On veut montrer que $p(r)$ vient toucher 0 à distance finie de $r = 0$, afin de construire une sous-solution à support compact. En remarquant que $p(r)$ est strictement concave tant que $p \in (\theta, \gamma]$ et strictement convexe dès que $p \in (0, \theta)$ (avec inflexion quand p croise θ), une rapide analyse qualitative de l'EDO ci-dessus nous informe que $p > 0$ et $p' < 0$ jusqu'à un certain $R > 0$ critique, qui vérifie soit

$$p'(R) = 0 \text{ et } 0 \leq p(R) < \theta \quad \text{avec } R \in (0, +\infty],$$

soit

$$p'(R) < 0 \text{ et } p(R) = 0 \quad \text{avec } R < +\infty.$$

Montrons que le premier cas ne peut pas se produire. Par l'absurde, en multipliant l'équation par p' et en intégrant entre 0 et R , on obtiendrait

$$0 = \int_0^R \{p''p' + f(p)p'\} dr = \frac{p'(R)^2 - p'(0)^2}{2} + F(p(R)) - F(\gamma) = F(p(R)) - F(\gamma)$$

où F est une primitive de f (ceci a du sens y compris dans le cas $R = +\infty$, en abusant un peu des notations). Par choix de γ , il est facile de vérifier que

$$F(\gamma) - F(p(R)) = \int_{p(R)}^{\gamma} f > 0,$$

et l'égalité ci-dessus est donc impossible. On conclut que $R \in (0, +\infty)$, que

$$p'(r) < 0 \text{ pour } r \in (0, R],$$

et

$$p(R) = 0.$$

On pose ensuite

$$\underline{u}_0(x) = p(|x|),$$

qui est donc de classe \mathcal{C}^2 sur $B_R = (-R, R)$. Par construction \underline{u}_0 est solution stationnaire sur B_R , donc en particulier c'est une sous-solution. On en déduit par un argument similaire à précédemment que, si $B_R \subset \Omega$, la solution $\underline{u}(t, \cdot)$ dans le domaine Ω associée à la donnée initiale \underline{u}_0 (étendue par zéro en dehors de B_R) est croissante en temps, et converge vers un état stationnaire positif (car au-dessus de $\underline{u}_0 \not\equiv 0$). La convergence s'étend immédiatement à toutes les données initiales coincées entre \underline{u}_0 et cet état stationnaire. ■

Remark 3.2.22 *En dimension supérieure la stratégie est très similaire. Elle consiste à construire une bonne sous-solution à symétrie radiale, i.e. de la forme $q(|x|)$, à support dans une boule B_R . Toutefois, en dimension N le Laplacien radial s'écrit $\Delta q = q'' + \frac{N-1}{r}q'$, et le terme supplémentaire $\frac{N-1}{r}q'$ a le mauvais signe lorsque q est décroissante (ce qui se produit forcément pour une fonction positive à support compact).*

L'idée est de tirer profit du fait que $\frac{N-1}{r}$ est petit lorsque r est grand. En effet, il existe $r_0 > 0$ assez grand tel que la solution p de l'EDO $p'' + \frac{N-1}{r}p' + f(p) = 0$ avec $p(r_0) = \gamma$ (γ est choisi de la même manière que ci-dessus) et $p'(r_0) = 0$ s'annule en $r_0 + R$ et est décroissante sur $(r_0, r_0 + R)$. Il s'agit juste de dire que cette solution est proche, lorsque r est grand, de celle qu'on a construite plus haut (continuité des solutions d'une équation différentielle en ses paramètres). Ensuite, on définit

$$\underline{u}_0(x) = q(|x|) = \begin{cases} \gamma & \text{si } |x| \leq r_0, \\ p(|x|) & \text{si } |x| \in (r_0, r_0 + R), \\ 0 & \text{si } |x| \geq r_0 + R. \end{cases}$$

Cette fonction est une sous-solution et, en l'utilisant comme donnée initiale, le même argument qu'en dimension 1 fonctionne. Il y a toutefois un piège : cette

fonction n'est pas C^2 (au voisinage de la sphère de rayon r_0)! En fait, c'est ce qu'on appelle une sous-solution généralisée, car la continuité C^1 suffit ici à appliquer le principe de comparaison. On peut retrouver ce principe à l'aide des outils développés au chapitre précédent. Pour cela, il faut appliquer un principe de comparaison sur chaque partie du domaine B_{r_0} , $B_{r_0+R} \setminus B_{r_0}$ et $\mathbb{R}^N \setminus B_{r_0+R}$ (ce qui permet de montrer qu'une sous et une sur-solution initialement ordonnées ne peuvent pas s'y toucher), ainsi qu'un lemme de Hopf aux interfaces entre ces domaines (ce qui permet de montrer qu'une sous-solution et une sur-solution ne peuvent pas s'y toucher avant qu'un point de contact soit apparu à l'intérieur de l'un de ces domaines).

3.2.3 Condition au bord de Robin

Nous nous contenterons d'un simple théorème, qui permet d'étendre un certain nombre de théorèmes vus plus haut au cas d'une condition au bord de type Robin ($\partial_n u + qu = 0$ sur $\partial\Omega$).

Theorem 3.2.23 *Soit une équation de réaction-diffusion quelconque (avec uniquement l'hypothèse $f(0) = 0$ et $f(u) < 0$ pour $u > 1$). On note u_D , u_N , u_{R_1} et u_{R_2} les solutions de cette équation avec respectivement une condition au bord de Dirichlet, Neumann, Robin avec $q_1 > 0$ et Robin avec $q_2 > 0$. La donnée initiale $u_0(x) \geq 0$ est commune aux quatre solutions et est supposée suffisamment régulière. On suppose de plus $q_1 > q_2$.*

Alors

$$u_D \leq u_{R_1} \leq u_{R_2} \leq u_N.$$

Ce théorème découle immédiatement d'un principe de comparaison (ou plutôt d'un principe de comparaison par inégalité ci-dessus). On pourra simplement insister sur l'interprétation : la condition de Robin signifie (lorsque $q > 0$, ce que l'on avait supposé lorsqu'on l'avait définie) qu'il y a une perte au bord, i.e. certains individus quittent l'environnement. Il est donc naturel que la population soit moindre que dans le cas Neumann, pour lequel il n'y a pas de perte. De même, au plus la perte est forte (au plus q est grand), au plus la population est petite. Enfin, la condition de Dirichlet peut formellement être comprise comme la limite d'une condition de Robin lorsque $q \rightarrow +\infty$...

Corollary 3.2.24 *Sous les hypothèses du précédent théorème, supposons que u_D tend vers 0 et que u_N tend vers un état stationnaire positif (on a vu qu'une telle situation pouvait exister). Alors il existe un $q^* \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ critique tel que u_R tend vers 0 si $q > q^*$ et seulement si $q \geq q^*$.*

Noton que dans ce corollaire, on permet à q^* de dépendre de la donnée initiale u_0 . Dans le cas KPP, on peut montrer que ce n'est en fait pas le cas et que q^* est le même quelque soit la donnée initiale (non triviale en tout cas), car le comportement des solutions est toujours dicté par la première valeur propre du problème linéarisé en 0. Une telle approche sera développée dans la suite de ce chapitre.

Remarquons ensuite que même si l'existence d'un tel q^* est claire (il suffit de prendre q^* comme l'infimum tel que la solution converge vers 0, puis d'utiliser le théorème précédent), on pourrait vouloir plus d'informations. Par exemple on peut montrer que lorsque $q < q^*$, non seulement la solution ne converge pas vers 0 pour $t \rightarrow \infty$ (c'est la contraposée du "seulement si" dans l'énoncé), mais elle ne converge pas non plus vers 0 à extraction d'une sous-suite près $t_n \rightarrow \infty$ (ce qui est un résultat plus fort).

En effet, supposons qu'il existe une suite $t_n \rightarrow \infty$ telle que $u(t_n, \cdot) \rightarrow 0$. Comme on sait que $u(t, \cdot)$ ne peut pas converger uniformément vers zéro, il existe une suite de points $x_m \in \bar{\Omega}$ et une suite de temps $s_m \rightarrow \infty$ telles que

$$u(s_m, x_m) \geq \varepsilon > 0$$

pour un certain $\varepsilon > 0$. En procédant exactement comme dans la preuve du Théorème 3.2.6, on peut montrer que $u(s_m, \cdot) \rightarrow p(\cdot)$ uniformément dans $\bar{\Omega}$, où p est un état stationnaire (il faut éventuellement pour cela extraire une sous-suite de s_m , mais dans ce cas la suite extraite satisfait toutes les mêmes propriétés donc on ne la renomme pas). Comme $u(s_m, x_m) \geq \varepsilon > 0$ on ne peut pas avoir $p \equiv 0$, donc d'après le principe fort $p(x) > 0$ partout dans $\bar{\Omega}$ (le fait que p soit strictement positif jusqu'au bord est crucial, et marche ici car on a la condition de Robin). Comme $u(t_n, \cdot) \rightarrow 0$ et $u(s_m, \cdot) \rightarrow p(\cdot) > 0$ on a, pour n_0 et m_0 grands mais fixés,

$$u(s_{m_0}, \cdot) > u(t_{n_0}, \cdot).$$

Par principe de comparaison,

$$u(s_{m_0} + t, \cdot) > u(t_{n_0} + t, \cdot), \quad \forall t \geq 0.$$

Autrement dit, pour $t \geq t_{n_0}$ assez grand,

$$u(t + s_{m_0} - t_{n_0}, \cdot) > u(t, \cdot), \quad \forall t \geq t_{n_0}.$$

À n_0 fixé on peut augmenter m_0 si besoin et supposer sans perte de généralité que $T = s_{m_0} - t_{n_0} > 0$, et on a donc

$$u(t + T, \cdot) > u(t, \cdot), \quad \forall t \geq t_{n_0}.$$

En prenant $t' = t + T$ au lieu de t ci-dessus on a

$$u(t + 2T, \cdot) = u(t' + T, \cdot) \geq u(t', \cdot) = u(t + T, \cdot) > u(t, \cdot).$$

Par récurrence immédiate, on voit que

$$u(t + jT, x) > u(t, x), \quad \forall j \in \mathbb{N}, \forall t \geq t_{n_0}, \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Comme $T > 0$, pour tout nouvel entier k il existe j_k tel que $(j_k - 1)T \leq t_k \leq j_k T$. D'après les estimations standard, $u_k(\tau, x) := u(t_k + \tau, x) \rightarrow 0$ localement uniformément en temps et en espace (puisque la donnée initiale $u_k(0, \cdot) =$

$u(t_k, \cdot) \rightarrow 0$ par hypothèse). Soit finalement $\tau_k := (j_k T - t_k) + s_{m_0} \geq 0$: comme $|j_k T - t_k| \leq 1$ et que $s_{m_0} \geq 0$ est fixé, on voit que $\tau_k \geq 0$ reste borné. On a donc $u_k(\tau_k, \cdot) \rightarrow 0$ uniformément sur $\bar{\Omega}$, mais d'autre part en prenant $x = x_{m_0}$ et $t = s_{m_0} \geq t_{n_0}$ dans l'inégalité précédente

$$0 < \varepsilon \leq u(s_{m_0}, x_{m_0}) \leq u(s_{m_0} + j_k T, x_{m_0}) = u(t_k + \tau_k, x_{m_0}) = u_k(\tau_k, x_{m_0}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0,$$

ce qui est absurde.

Remark 3.2.25 *Concluons cette section en insistant sur l'omniprésence des principes de comparaison tout au long de ces arguments !*

3.3 Le cas KPP hétérogène en espace

On s'intéresse maintenant à l'équation

$$\partial_t u = D\Delta u + f(x, u),$$

sous les hypothèses données en début de chapitre. Cette fois-ci, la fonction f dépend effectivement de x , mais le cas homogène peut bien sûr être vu comme un cas particulier. Cette généralisation est naturelle pour la modélisation : on peut par exemple imaginer que la distribution des ressources n'est pas uniforme dans l'espace, ce qui a un effet sur la reproduction de l'espèce. On attire aussi l'attention du lecteur sur la présence d'un coefficient de diffusion $D > 0$, qui n'était pas inclus dans l'analyse précédente : on en discutera pour discuter rapidement en fin de section la façon dont la diffusion peut influencer sur le comportement en temps grand de la solution.

Pour fixer les idées, nous considérerons ici une condition au bord de type Dirichlet, mais les étudiants pourront se convaincre que tous les arguments fonctionnent également pour des conditions au bord de type Neumann ou Robin.

Comme le titre l'indique, on ne considérera ici que le cas KPP (on n'a vu que le cas bistable, même homogène, est déjà difficile). Plus précisément, on supposera toujours que

$$f \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$$

$$f(x, u = 0) \equiv 0 \quad , \quad \exists M > 0, \forall u \geq M, f(x, u) \leq 0.$$

Par KPP, on signifiera ici que

$$\forall x \in \bar{\Omega}, \quad u \mapsto \frac{f(x, u)}{u} \text{ strictement décroissante .}$$

Jusqu'ici, on avait toujours associé le mot KPP à "monostable". On ne le fait pas ici car le sens de "monostable" n'est plus aussi évident dans le cas hétérogène. On pourrait supposer que $u \mapsto f(x, u)$ est monostable pour tout t et x , mais ce serait réducteur car nos arguments sont plus généraux : nous ne ferons donc

aucune hypothèse de monostabilité, même si typiquement on pourra garder ce cas en tête.

L'avantage de l'hypothèse KPP est que le problème ressemble beaucoup au problème linéaire. En effet, cet hypothèse implique que

$$f(x, u) \leq \partial_u f(x, 0)u.$$

En particulier, les solutions de l'équation linéaire

$$\partial_t u = D\Delta u + \partial_u f(x, 0)u$$

sont sur-solutions de l'équation KPP. Par application du principe de comparaison, les solutions de l'équation KPP peuvent être estimées par au-dessus par des solutions de l'équation linéaire.

Par ailleurs, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de $u = 0$ tel que dans ce voisinage,

$$f(x, u) \geq (\partial_u f(x, 0) - \varepsilon)u.$$

Par conséquent, les solutions de l'équation linéaire

$$\partial_t u = D\Delta u + (\partial_u f(x, 0) - \varepsilon)u,$$

tant qu'elles sont proches de 0, sont sous-solutions de l'équation KPP. Cela devrait donc nous fournir une estimation par en-dessous des solutions de l'équation KPP.

3.3.1 Problème linéaire et fonctions propres principales

La discussion ci-dessus nous invite à considérer d'abord le cas linéaire. Nous nous intéressons donc dans cette section aux solutions de

$$\partial_t u = D\Delta u + \partial_u f(x, 0)u.$$

Pour comprendre la méthode que nous allons introduire, considérons un système d'équations différentielles

$$\partial_t u = Au$$

où $u(t)$ est à valeurs vectorielles dans \mathbb{R}^N et A est une matrice. Alors les solutions peuvent être décomposées en une combinaison linéaire. Plus précisément, on peut construire une base de vecteurs propres de l'espace des solutions (alors \mathbb{R}^n), et les solutions s'écrivent

$$u = \sum e^{\lambda_i t} v_i$$

où les v_i satifont

$$Av_i = \lambda_i v_i.$$

Finalement, le terme important dans cette somme est celui pour lequel λ_i est maximal. Le fait que la solution converge vers 0 dépend essentiellement de ce

terme-ci. Notre but dans cette section sera donc de construire, pour l'équation de réaction-diffusion linéaire, une fonction qui jouera le même rôle que ce vecteur propre.

Considérons donc le problème de valeur et fonction propre

$$\begin{aligned} D\Delta\varphi + \partial_u f(x, 0)\varphi &= \lambda\varphi, \quad \text{dans } \Omega, \\ \varphi(x) &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

On impose de plus que $\varphi \neq 0$. On a choisi une condition de Dirichlet comme dans le problème originel, mais c'aurait pu être une autre condition au bord. Dans ce problème, il y a bien deux inconnues : trouver la valeur propre λ et la fonction propre associée φ . La fonction propre peut bien sûr être définie à multiplication par un facteur réel non nul près. On peut donc sans généralité ajouter la condition

$$\|\varphi\|_\infty = 1,$$

appelée normalisation.

Dans cette section nous allons prouver le théorème ci-dessous :

Theorem 3.3.1 *Il existe un unique $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et une unique fonction $\varphi_1 \in C^2(\Omega)$ satisfaisant les équations ci-dessus ainsi que $\varphi_1 > 0$ dans Ω .*

De plus, λ_1 est la plus grande valeur propre de l'opérateur

$$\varphi \in C^2(\Omega) \cap \{\varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \mapsto D\Delta\varphi + \partial_u f(x, 0)\varphi.$$

*Elle est appelée **valeur propre principale***

Ce qui comptera vraiment pour nous est le fait que la fonction propre φ_1 est positive. Elle pourra donc servir à encadrer les solutions qui nous intéressent, qui sont toujours positives. Le fait que λ_1 soit la plus grande valeur propre ne sera pas directement utilisé dans nos arguments plus bas, mais il permet de comprendre ce qui se passe : comme pour le système d'équations différentielles formellement décrit plus haut, c'est bien cette valeur propre qui dicte le comportement des solutions.

Ce théorème fait appel au théorème de Krein-Rutman :

Theorem 3.3.2 (Krein-Rutman) *Soit X un espace de Banach, et $K \subset X$ est un cône convexe (i.e. un fermé stable par combinaisons linéaires à coefficients positifs, et tel que $K \cap (-K) = \{0\}$) à intérieur $\overset{\circ}{K}$ non vide.*

Soit $T : X \rightarrow X$ a un opérateur compact non trivial tel que $T(K) \subset K$, et tel que $T(K \setminus \{0\}) \subset \overset{\circ}{K}$. Alors il existe $x \in K \setminus \{0\}$ tel que

$$Tx = r(T)x$$

où $r(T) > 0$ est son spectre radial

$$r(T) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|T^k\|^{1/k}.$$

Nous admettrons ce théorème, qui est une généralisation d'un théorème peut-être connu en dimension finie (Perron-Frobenius), et passons directement à la preuve du théorème plus haut sur l'équation de réaction-diffusion.

Remark 3.3.3 *En fait le théorème de Krein-Rutman a des hypothèses un peu différentes, mais il a été étendu aux hypothèses ci-dessus.*

Proof. Dans toute la preuve on se fixe une bonne fois pour toute une constante $M > 0$ suffisamment grande pour que $M - \partial_u f(x, 0) \geq M/2 > 0$ dans $\bar{\Omega}$ (c'est possible car f est C^1). Soit \mathcal{L}_M l'opérateur qui à $\psi \in X = C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \cup \{\psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ associe la solution de

$$D\Delta\varphi + \partial_u f(x, 0)\varphi - M\varphi = -\psi$$

avec condition de Dirichlet

$$\varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Cet opérateur n'est a priori pas défini (d'autant que même si les étudiants doivent connaître certaines équations elliptiques, nous n'en avons pas vues jusqu'ici dans ce module). Néanmoins, il est possible de considérer l'équation d'évolution

$$\partial_t u = D\Delta u + (\partial_u f(x, 0) - M)u + \psi.$$

Puisque $M > \max_{x \in \bar{\Omega}} \partial_u f(x, 0)$, il est clair qu'on peut trouver $K_1 > 0$ suffisamment grand (selon $\|\psi\|_\infty$) tel que K_1 est sur-solution de cette équation et $-K_1$ en est sous-solution. En considérant la solution avec donnée initiale K_1 , on peut facilement montrer que celle-ci est décroissante et converge un état stationnaire quand $t \rightarrow +\infty$ (la preuve détaillée utilise, comme on l'a fait plusieurs fois, les estimations paraboliques). Cet état stationnaire est bien une solution de l'équation elliptique plus haut.

De plus, considérons deux solutions φ_1 et φ_2 . Alors $\varphi_1 - \varphi_2$ satisfait

$$D\Delta(\varphi_1 - \varphi_2) + (\partial_u f(x_0) - M)(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

D'après notre choix de M plus haut on a en particulier que le coefficient d'ordre zéro $a_0(x) = (\partial_u f(x_0) - M) < 0$, ce qui implique facilement que $\varphi_1 - \varphi_2$ ne peut ni admettre un maximum positif, ni un minimum négatif dans Ω . Puisque $\varphi_1 - \varphi_2$ vaut 0 au bord, on a donc $\varphi_1 \equiv \varphi_2$.

Finalement, on a montré que l'opérateur \mathcal{L}_M est bien défini de X dans X . Il est de plus compact d'après les estimations jusqu'au bord du chapitre précédent : pour toute suite ψ_k de norme $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ bornée, la suite φ_k des solutions est bornée dans $C^{2,\alpha}$, donc admet une sous-suite convergente dans $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Remark 3.3.4 *Plus simplement, on veut résoudre l'équation elliptique $-D\Delta\varphi + (M - \partial_u f(x, 0))\varphi = \psi$, avec condition homogène de Dirichlet $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$. Comme on a pris $M \gg 1$ suffisamment grand pour que le coefficient d'ordre zéro $(M - \partial_u f(x, 0)) \geq M/2 > 0$, on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram pour la forme bilinéaire coercive $B(u, v) := \int_{\Omega} \{D\nabla u \cdot \nabla v + (M - \partial_u f(x, 0))uv\} dx$, qui est donc coercive sur $H_0^1(\Omega)$ et obtenir une unique solution faible. Les estimations de régularité elliptique montrent enfin que si $\psi \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ alors la solution $\varphi \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ aussi.*

Définissons ensuite le cône convexe

$$K = \{\psi \in X \mid \psi \geq 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \partial_n \psi \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Clairement K a un intérieur non vide dans X (prendre n'importe quelle fonction positive régulière ayant une pente normale extérieure strictement négative sur $\partial\Omega$). Par un principe de comparaison et le lemme de Hopf, on peut montrer que $\mathcal{L}_M(K) \subset K$ (i.e si $\psi \geq 0$ alors $\varphi \geq 0$) et $\mathcal{L}_M(K \setminus \{0\}) \subset \overset{\circ}{K}$ (si ψ est de plus non triviale alors $\varphi > 0$ dans Ω avec $\partial_n \varphi|_{\partial\Omega} < 0$). Notons que nos principes de comparaison portaient sur des équations d'évolution mais il est facile ici de montrer que $\mathcal{L}_M(\psi)$ est une fonction positive (au sens large), puis le principe fort et le lemme de Hopf paraboliques s'appliquent. Pour montrer que $\mathcal{L}_M(\psi) \geq 0$, on peut utiliser le fait que pour tout $C > 0$, la fonction $-Ce^{-\frac{M}{2}t}$ est une sous-solution du problème lorsque $\psi \geq 0$.

Remark 3.3.5 *Là encore, nous faisons quelques détours pour toujours nous ramener à un problème parabolique. Ce n'est évidemment pas nécessaire lorsqu'on dispose déjà des principes du maximum dans le cadre elliptique.*

Le théorème de Krein-Rutman implique que le rayon spectral $r(\mathcal{L}_M)$ de \mathcal{L}_M est strictement positif, et que l'opérateur \mathcal{L}_M admet donc une fonction propre $\varphi_M \in K$. Cette fonction est aussi une fonction propre de l'opérateur inverse, i.e.

$$D\Delta\varphi_M + \partial_u f(x, 0)\varphi_M - M\varphi_M = -\frac{1}{r(\mathcal{L}_M)}\varphi_M.$$

En posant $\lambda_M = -\frac{1}{r(\mathcal{L}_M)} + M$, on obtient bien un couple (λ_M, φ_M) satisfaisant toutes les conditions du théorème (nous n'avons pas parlé de la normalisation mais elle est évidente à une multiplication par un facteur près).

Il reste encore à montrer l'unicité (et en particulier, que λ_M, φ_M construits ci-dessus ne dépendent en fait pas du choix de M) et le fait que $\lambda = \lambda_M$ est la plus grande valeur propre. L'argument est très proche d'un argument utilisé dans le cas KPP homogène avec condition au bord de Dirichlet pour montrer l'unicité de la solution stationnaire positive, cf. première partie de la preuve du Théorème 3.2.18.

Soient deux fonctions propres positives φ_1, φ_2 associées aux valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2$, c'est-à-dire $D\Delta\varphi_i + \partial_u f(x, 0)\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$. Puisque ces deux fonctions sont positives, et grâce aussi au lemme de Hopf, il existe $\theta^* > 0$ tel que

$$\theta^* \varphi_1 \leq \varphi_2$$

et on a soit un point de contact intérieur

$$\theta^* \varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0), \quad x_0 \in \Omega,$$

soit un point de contact au premier ordre à la frontière

$$\theta^* \partial_n \varphi_1(x_0) = \partial_n \varphi_2(x_0), \quad x_0 \in \partial\Omega.$$

Mais par linéarité $\varphi_2 - \theta^* \varphi_1$ vérifie

$$D\Delta(\varphi_2 - \theta^* \varphi_1) + \partial_u f(x, 0)(\varphi_2 - \theta^* \varphi_1) = \lambda_2 \varphi_2 - \lambda_1 \theta^* \varphi_1.$$

Si $\lambda_2 \leq \lambda_1$, on en déduit que $\varphi_2 - \theta^* \varphi_1$ est sur-solution d'une équation elliptique linéaire, donc de l'équation d'évolution associée. D'après le principe fort, $\varphi_2 \equiv \theta^* \varphi_1$. Cela implique que $\lambda_2 = \lambda_1$ et, d'après la normalisation, $\varphi_2 \equiv \varphi_1$. L'unicité est prouvée.

Comme on vient de montrer que λ_M ne dépend en fait pas de M , on note désormais $\lambda = \lambda_M$. Le fait que λ est la plus grande valeur propre suit de la définition du rayon spectral $r(\mathcal{L}_M)$, qui est forcément la plus grande valeur propre de \mathcal{L}_M . En effet, on a par construction $0 < r(\mathcal{L}_M) = -(\lambda - M)^{-1}$. Pour toute autre valeur propre μ , on a que $-(\mu - M)^{-1}$ est valeur propre de \mathcal{L}_M , en particulier $-(\mu - M)^{-1} \leq r(\mathcal{L}_M) = -(\lambda - M)^{-1}$ et donc $\mu \leq \lambda$.

Remarquons enfin que X n'est pas C^2 qui est l'espace mentionné dans le théorème principal, ce qui ne change rien à l'argument ici puisque toute fonction propre de l'un ou l'autre de ces opérateurs est dans ces deux espaces. Cela vaut aussi pour les valeurs propres complexes, si on étend l'opérateur dans \mathbb{C} . ■

Nous avons donc maintenant un outil pour l'étude de l'équation nonlinéaire, en tout cas pour le cas KPP. Par analogie avec les équations différentielles, on s'attend à ce que les solutions convergent vers 0 (extinction) lorsque $\lambda_1 < 0$, mais pas (survie) lorsque $\lambda_1 > 0$. Nous allons montrer cela rigoureusement dans la section suivante.

3.3.2 Retour à l'équation KPP

Nous sommes maintenant en position pour prouver le théorème suivant :

Theorem 3.3.6 *Soient un domaine Ω borné et une équation de réaction-diffusion de type KPP avec condition au bord de Dirichlet. Soit aussi λ_1 la valeur propre principale définie plus haut.*

Alors :

- si $\lambda_1 \leq 0$, alors toutes les solutions convergent uniformément vers 0 ; en particulier il n'existe pas d'état stationnaire positif ;
- si $\lambda_1 > 0$, alors il existe un unique état stationnaire positif p et toutes les solutions non triviales convergent uniformément vers p .

Remark 3.3.7 *Le même théorème est vrai pour des conditions au bord de Neumann et Robin, même si on ne traite ici que le cas Dirichlet. On reviendra là-dessus dans la section suivante.*

Rappelons aussi qu'on avait énoncé une propriété semblable pour les systèmes coopératifs d'équations différentielles : on avait en effet énoncé qu'un état d'équilibre est stable si le problème linéarisé admet une valeur propre négative, associée à un vecteur propre dont les composantes sont positives. Pour une fonction, ses composantes sont ses valeurs en chaque point, ce qui coïncide bien avec la notion de fonction propre principale développée ici.

Avant de prouver ce théorème, considérons certains exemples. Un premier exemple évident est le cas de l'équation homogène avec condition au bord de Neumann (encore une fois, la section précédente peut facilement être adaptée au cas Neumann, qui est même un peu plus facile). Alors on vérifie facilement (par unicité) que la valeur propre principale est $\lambda_1 = f'(0)$ (associée à la fonction propre $\varphi_1(x) \equiv 1$). Comme cette valeur propre ne dépend pas du domaine, et si $f'(0) > 0$, on retrouve le Théorème 3.2.2 prouvé plus haut. Remarquons que le Théorème 3.2.2 était toutefois plus général puisqu'on y faisait pas l'hypothèse KPP.

Un autre exemple plus intéressant est $\Omega = (-L, L) \subset \mathbb{R}$ avec condition de Dirichlet et $f(u)$ homogène. Alors il existe une valeur propre et une fonction propre principales, i.e. λ_1 et $\varphi_1 > 0$ tels que

$$D\Delta\varphi_1 + f'(0)\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1.$$

On peut vérifier facilement que

$$\varphi_1(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right) > 0$$

et

$$\lambda_1 = -\frac{\pi^2 D}{4L^2} + f'(0)$$

conviennent, et par unicité on a bien l'unique couple valeur/fonction propre principale. En résolvant $\lambda_1(L) = 0$ obtient donc l'expression explicite

$$L^* = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{D}{f'(0)}},$$

qui est la taille critique de l'environnement en dessous de laquelle l'espèce s'éteint ($L \leq L^*$) et au dessus de laquelle l'espèce survit ($L > L^*$). En particulier cela étend le théorème 3.2.18 vu plus haut dans le cas homogène avec condition au bord Dirichlet pour des tailles de domaine intermédiaire (cf. aussi le théorème 3.2.20). En dimension quelconque, il n'existe en général pas de formule explicite. Néanmoins le théorème ci-dessus s'applique et, à défaut de nous donner un critère explicite, il nous confirme qu'il n'existe pas d'autres situations que celles observées plus haut : soit toutes les solutions convergent vers zéro (extinction), soit toutes les solutions convergent vers un unique état stationnaire $p(x)$ (persistance)

Preuve du théorème 3.3.6. Considérons tout d'abord le cas $\lambda_1 < 0$. Alors pour tout $\gamma > 0$, il est facile de vérifier que $\gamma\varphi_1(x)e^{\lambda_1 t}$ est solution de l'équation linéaire, donc sur-solution de l'équation KPP par l'hypothèse KPP. S'il existe un état stationnaire positif p , alors on peut trouver $\gamma > 0$ tel que $\gamma\varphi_1 > p$ (rappelons que $\partial_n\varphi_1 < 0$ au bord par le lemme de Hopf), et puisque $\gamma\varphi_1 e^{\lambda_1 t}$ tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$, on obtient une contradiction. Il est facile d'en déduire de la même manière que toutes les solutions, pour une condition initiale bornée, tendent vers 0.

Etendons maintenant ce résultat au cas $\lambda_1 = 0$. Dans ce cas, pour tout $\gamma > 0$, $\gamma\varphi_1$ est sur-solution de l'équation KPP, mais elle ne décroît plus vers 0. Néanmoins, si on suppose par contradiction qu'il existe un état stationnaire positif p , on peut trouver

$$\gamma^* = \inf\{\gamma > 0 \mid \gamma\varphi_1 \geq p\}.$$

Alors soit il existe $x_0 \in \Omega$ tel que

$$\gamma^*\varphi_1(x_0) = p(x_0)$$

ou $x_0 \in \partial\Omega$ tel que

$$\partial_n \gamma^*\varphi_1(x_0) = \partial_n p(x_0).$$

Dans les deux cas, le principe fort implique que $\gamma^*\varphi_1 \equiv p$. Mais $\gamma^*\varphi_1$ ne peut pas être solution (sur-solution mais pas solution : on rappelle que $f(u)/u$ décroît strictement), et on obtient donc une contradiction.

À l'aide d'un argument similaire, pour toute solution $u(t, x)$, on peut construire une fonction

$$t \mapsto \gamma(t) := \min\{\gamma > 0 \text{ t.q. } \gamma\varphi_1(x) \geq u(t, x) \text{ dans } \Omega\} \geq 0.$$

Soit $t_0 \geq 0$ fixé. Alors $\gamma(t_0)\varphi_1(x)$ (vue donc comme une fonction qui ne dépend pas du temps) est une sur-solution. En particulier, par principe de comparaison $u(t_0 + s, x) \leq \gamma(t_0)\varphi_1(x)$ pour tout $s \geq 0$ et $x \in \bar{\Omega}$. En particulier $\gamma(t_0 + s) \leq \gamma(t_0)$. Puisque t_0 et s peuvent être choisis arbitrairement (tant que positifs), on en conclut que $\gamma(t)$ est une fonction décroissante du temps.

En particulier, $\gamma(t)$ tend vers une certaine limite $\gamma_\infty \geq 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Supposons par contradiction que $\gamma_\infty > 0$. À l'aide des estimations paraboliques usuelles, on peut extraire une suite t_n telle que $u(t_n + t, x)$ converge vers une solution u_∞ de l'équation de réaction-diffusion, qui satisfait alors

$$u_\infty(t, \cdot) \leq \gamma_\infty\varphi_1$$

pour tout t . Comme $\gamma(t)u(t, \cdot)$ avait un point de contact $x(t)$ (qui peut être au bord et de premier ordre) avec $u(t, \cdot)$ pour tout $t \geq 0$, il n'est pas difficile de voir que $u_\infty(t, \cdot)$ doit avoir un point de contact avec $\gamma_\infty\varphi_1(\cdot)$ (passer par exemple à la limite dans $u(t + t_n, x(t + t_n)) = \gamma(t + t_n)\varphi_1(x(t + t_n))$ avec $x(t + t_n) \rightarrow x_\infty(t)$ par compacité de $\bar{\Omega}$). Le principe fort implique à nouveau que $u_\infty \equiv \gamma_\infty\varphi_1$, ce qui aboutit à une contradiction lorsque $\gamma_\infty > 0$. Finalement $\gamma_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = 0$, ce qui signifie bien que $u(t, \cdot)$ converge uniformément vers 0 puisque $u(t, \cdot) \leq \gamma(t)\|\varphi_1\|_\infty = \gamma(t)$.

On considère ensuite le cas $\lambda_1 > 0$. Nous savons déjà prouver l'unicité de l'état stationnaire positif, à l'aide du même argument que celui utilisé dans la preuve du théorème 3.2.18 plus haut. Soient en effet p_1 et p_2 deux états stationnaires positifs. Alors on peut trouver θ^* tel que

$$\theta^*p_1 \geq p_2$$

et

$$\theta^* p_1(x_0) = p_2(x_0)$$

pour $x_0 \in \Omega$, ou

$$\partial_n \theta^* p_1(x_0) = \partial_n p_2(x_0)$$

pour $x_0 \in \partial\Omega$. Si $\theta^* \geq 1$ (ce qu'on peut supposer quitte à intervertir p_1 et p_2), on obtient par le principe fort que $\theta^* p_1 \equiv p_2$, et alors forcément $\theta^* = 1$ (sinon $\theta^* p_1$ n'est pas solution).

Construisons maintenant une sous-solution. On fixe d'abord $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que

$$\lambda_1 - \varepsilon > 0,$$

puis $\delta > 0$ également petit pour que

$$f(x, u) \geq (\partial_u f(x, 0) - \varepsilon)u, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \forall u \in [0, 2\delta].$$

Considérons ensuite

$$\underline{u}_0(x) := \delta \varphi_1(x).$$

Comme par convention on avait toujours normalisé la fonction propre principale $\|\varphi_1\|_\infty = 1$, on a $0 \leq \underline{u}_0(x) \leq \delta$ et donc

$$\partial_t \underline{u}_0 - D\Delta \underline{u}_0 - f(x, \underline{u}_0) \leq (-\lambda_1 + \varepsilon)\underline{u}_0 \leq 0.$$

Donc \underline{u}_0 est sous-solution (bien sûr elle vérifie la condition au bord de Dirichlet, puisque φ_1 s'annule au bord par construction). En particulier, la solution \underline{u} de l'équation de réaction-diffusion avec condition initiale \underline{u}_0 satisfait $\underline{u}(t, \cdot) \geq \underline{u}_0$ pour tout temps $t > 0$. Une autre application du principe de comparaison implique que \underline{u} est croissante en temps.

Par ailleurs, $\underline{u}(t, x) \leq M$ pour tout $t > 0$ et $x \in \bar{\Omega}$. On rappelle ici que M était une constante positive telle que $f(x, u) \leq 0$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $u \geq M$. A l'aide des estimations paraboliques usuelles, on en déduit comme on l'a déjà fait plusieurs fois que $\underline{u}(t, x)$ converge uniformément en x , quand $t \rightarrow +\infty$, vers une solution stationnaire positive $p(x)$ non triviale (puisque $p \geq \underline{u}_0 \not\equiv 0$). Une telle solution existe donc.

Il ne reste plus qu'à montrer que toutes les solutions non triviales convergent vers p . Il suffit d'abord de remarquer que, pour une solution non triviale u , on a que

$$u(1, \cdot) > 0$$

dans Ω et

$$\max_{\partial\Omega} \partial_n u(1, \cdot) < 0,$$

et par conséquent quitte à réduire δ on peut supposer que

$$\underline{u}_0(\cdot) \leq u(1, \cdot).$$

En particulier

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) \geq p(x).$$

Pour autant la preuve n'est pas terminée : de petites solutions garantissent la survie mais ce n'est pas la même chose que la convergence vers un état positif. Par un argument similaire à ci-dessus, il existe $\theta > 1$ tel que $\theta p \geq u(1, \cdot)$ et θp est sur-solution. Alors la solution \bar{u} associée à la condition initiale θp est décroissante en temps. De plus, par principe de comparaison $\bar{u}(t, \cdot) \geq p$ pour tout temps, donc elle converge vers une solution stationnaire qui par unicité doit être p . Une dernière application du principe de comparaison implique

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) \leq p(x).$$

On peut conclure que u converge uniformément vers p quand $t \rightarrow +\infty$. \blacksquare

3.3.3 A propos du cas non KPP

La construction ci-dessus n'est pas inutile en dehors du cas KPP. En général, on peut au moins s'attendre à ce que le signe de λ_1 nous informe sur ce qui se passe au voisinage de 0. L'hypothèse KPP rendait cette information pertinente "globalement".

Pour un f satisfaisant seulement les hypothèses de ce début de chapitre, on peut toujours définir λ_1 . On a alors les résultats suivant :

- si $\lambda_1 > 0$, alors il existe un état stationnaire positif, et aucune solution non triviale ne converge vers 0 (comme $\lambda_1 > 0$ l'état zéro est instable et "repousse" donc la dynamique) ;
- si $\lambda_1 < 0$, alors il existe $\delta < 0$ tel que, pour toute donnée initiale $0 \leq u_0 \leq \delta$ telle que $\inf_{\partial\Omega} \partial_n u_0 \leq \delta$, la solution converge uniformément vers 0 (comme $\lambda_1 < 0$, on a que 0 est un état stationnaire stable : il attire alors la dynamique pour des conditions initiales suffisamment proches, i-e $0 \leq u_0(x) \leq \delta$, mais on ne peut rien conclure pour des données initiales "loin" de zéro).

Attention : contrairement au cas KPP (théorème 3.3.6), on ne peut rien conclure si $\lambda_1 = 0$! En effet, rien que dans le cas homogène, si $\lambda_1 = 0$ alors f pourrait être aussi bien positive que négative à droite de 0, ce qui conduit bien sûr à des comportements des solutions complètement différents.

La preuve de ces énoncés est très similaire à celle du théorème 3.3.6 plus haut. Dans le premier cas, on peut construire une sous-solution constante en temps aussi petite qu'on le souhaite. La solution associée à cette sous-solution comme donnée initiale est croissante en temps et converge vers un état stationnaire positif (qui cette fois n'a cependant aucune raison d'être unique). Dans le second cas, on peut construire une sur-solution positive et qui tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$, qui contraint les petites solutions à converger également vers 0.

On peut également définir la stabilité ou instabilité d'un état stationnaire autre que 0, en regardant le problème de valeur propre

$$D\Delta\varphi + \partial_u f(x, p)\varphi = \lambda_1\varphi$$

avec la condition au bord appropriée et $\varphi > 0$.

Par exemple, revenons au cas bistable en dimension 1 avec condition au bord de Neumann. Il est possible de prouver que tous les états intermédiaires p sont linéairement instables, c'est-à-dire que $\lambda_1 > 0$. Pour cela, il suffit de remarquer que p' est une fonction propre associée à la valeur propre 0 d'un problème avec condition au bord de Dirichlet. En effet, la valeur propre principale associée à la condition au bord de Neumann est toujours strictement plus grande que celle associée à une condition de type Dirichlet : moralement cela provient du fait que les solutions (positives) du problème avec condition au bord de Neumann sont sur-solutions du même problème avec condition au bord de Dirichlet. Cette instabilité linéaire permet de montrer le résultat suivant, qu'on énonce sans démonstration (la preuve n'est pas si triviale) :

Proposition 3.3.8 *Soit $(u_{0,\gamma})_{\gamma>0}$ une famille strictement ordonnée de données initiales. Alors il existe au plus un γ^* tel que la solution (de l'équation bistable en dimension 1 avec condition de Neumann) ne converge ni vers 0 ni vers 1.*

3.3.4 Dépendance de la valeur propre en les paramètres

La construction ci-dessus permet d'obtenir des résultats très généraux sur le comportement des solutions. On aimerait néanmoins connaître plus précisément λ_1 , pour prévoir le comportement des solutions. Bien sûr, il n'existe pas en général de formule explicite, en dehors de certains cas très particuliers tels que les exemples vus plus haut. En particulier, il peut sembler difficile de décrire comment λ_1 dépend des paramètres du problème.

On peut au moins montrer que

Proposition 3.3.9 *Soient $\Omega_1 \subset \Omega_2$ deux domaines, et $\lambda_1(\Omega_1)$ et $\lambda_1(\Omega_2)$ les valeurs propres principales associées à l'équation de réaction-diffusion avec condition au bord de Dirichlet, sur chacun des domaines Ω_1 et Ω_2 .*

Alors $\lambda_1(\Omega_1) \leq \lambda_1(\Omega_2)$.

Proof. On a déjà vu que les solutions sur respectivement Ω_1 et Ω_2 sont ordonnées, et cette proposition est donc naturelle. Elle se prouve exactement de la même manière puisqu'il suffit d'appliquer un principe de comparaison. ■

De même, si $f_1 \leq f_2$, il est clair que les valeurs propres correspondantes seront ordonnées. Pour aller plus loin, on admettra ici la formule suivante, dite de **Rayleigh** et valable dans le cas Dirichlet :

$$\lambda_1^D = - \min_{\substack{\psi \in H_0^1(\Omega) \\ \|\psi\|_{L^2(\Omega)} = 1}} \left\{ D \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 - \int_{\Omega} \partial_u f(x, 0) \psi^2 \right\}.$$

Ici H_0^1 est l'ensemble des fonctions H^1 qui s'annulent sur $\partial\Omega$. Il est au moins clair que, lorsque $\psi = \varphi_1$, la fonctionnelle de droite donne bien $-\lambda_1$. De même, si φ est une fonction propre associée à une valeur propre λ , on obtient $-\lambda$. Si l'on admet formellement qu'il existe une famille de valeurs propres $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$

qui "génère" (ici dans le sens où l'ensemble des combinaisons linéaires est dense dans) H^1 , alors puisque λ_1 est la plus grande valeur propre on obtient bien cette formule. Bien sûr il pourrait y avoir des valeurs propres complexes mais on ne cherche pas ici à démontrer un résultat rigoureux (ceci n'est toutefois pas le cas car l'opérateur $-\Delta - \partial_u f(x, 0)$ est autoadjoint, ce qui est une généralisation des matrices symétriques en dimension infinie, donc son spectre est réel).

Des formules similaires existent pour les autres conditions au bord. Ainsi, dans le cas Neumann on a

$$\lambda_1^N = - \min_{\substack{\psi \in H^1(\Omega) \\ \|\psi\|_{L^2(\Omega)} = 1}} \left\{ D \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 - \int_{\Omega} \partial_u f(x, 0) \psi^2 \right\},$$

et dans le cas Robin

$$\lambda_1^R = - \min_{\substack{\psi \in H_0^1(\Omega) \\ \|\psi\|_{L^2(\Omega)} = 1}} \left\{ D \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 + q \int_{\partial\Omega} \psi^2 - \int_{\Omega} \partial_u f(x, 0) \psi^2 \right\}.$$

Notons qu'il n'est pas évident que cette formule est bien définie, à cause de l'intégrale sur $\partial\Omega$ (il faut connaître l'injection de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow H^{1/2}(\partial\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$). Les étudiants auront peut-être déjà vu ce genre de choses, assez similaires aux constructions de solutions d'EDP par des méthodes variationnelles.

Cette formule peut être utilisée pour approcher numériquement les couples valeurs/fonctions propres. Notons qu'il est aussi possible d'approcher numériquement les solutions de l'équation de réaction-diffusion, mais ce n'est pas tellement fiable lorsqu'on s'intéresse au comportement en temps grand. La formule de Rayleigh permet aussi d'obtenir quelques résultats théoriques intéressants.

Proposition 3.3.10 *La valeur propre principale λ_1 est décroissante par rapport au coefficient de diffusion D .*

Proof. C'est trivial puisque, pour tout ψ fixé, la fonctionnelle à minimiser est croissante en D . ■

L'interprétation de ce résultat est intéressante : plus les individus se déplacent (D grand), moins les chances de survie sont bonnes. Cela est-il raisonnable ? Oui, au moins pour des conditions au bord de type Dirichlet et Robin : en effet dans ces deux cas la frontière est néfaste, et plus les individus se déplacent, plus ils ont de chance de toucher la frontière.

Qu'en est-il du cas Neumann ? Lorsque f est homogène, alors on a vu que φ_1 est constante en espace. En particulier, elle est fonction propre principale quel que soit le choix de D , et λ_1 ne dépend pas du paramètre de diffusion D . Cela peut aussi se voir dans la formule, puisque là où le minimum est atteint (i-e $\psi = \varphi_1 \equiv cste$), le terme $D \int |\nabla \psi|^2$ s'annule. La décroissance en D n'en est plus vraiment une. Par contre, lorsque f est hétérogène, cette décroissance peut à nouveau être stricte : les individus auront plus tendance à se déplacer vers des

lieux moins favorables lorsque D est grand, ce qui pénalise la population dans son ensemble. Ce n'était pas évident à priori puisqu'on aurait pu imaginer le phénomène inverse.

Remark 3.3.11 *Il existe bien sûr aussi une interprétation physique, qui est que le terme de diffusion est une dissipation d'énergie. Cette perte d'énergie a un effet négatif sur les solutions.*

3.4 Le cas hétérogène périodique en temps

On pourrait s'étonner de ne pas avoir considéré une hétérogénéité en temps. En écologie, il est pourtant naturel de penser que le taux de reproduction dépend du temps, par exemple du fait des saisons. On pourrait ainsi considérer une fonction

$$f(t, x, u),$$

et supposer que

$$t \mapsto f(t, x, u)$$

est périodique (de période 1 pour simplifier), quel que soit u .

De même qu'au dessus, il est possible d'analyser le comportement des solutions du problème linéarisé en 0 et d'en déduire certaines choses sur les solutions du problème linéaire. Cette fois-ci, la valeur propre principale λ_1 sera l'unique réel tel qu'il existe une solution $\varphi_1(t, x) > 0$, 1-périodique en temps et solution de

$$\partial_t \varphi_1 - D\Delta \varphi_1 - \partial_u f(t, x, 0)\varphi_1 = -\lambda_1 \varphi_1,$$

avec la condition au bord appropriée. L'argument de la section précédente se complique un peu mais il fonctionne grâce à la périodicité en temps (φ_1 est alors définie par sa restriction au domaine compact $[0, 1] \times \bar{\Omega}$). Dans le cas KPP, un théorème similaire au théorème 3.3.6 plus haut est encore vrai : le signe de λ_1 détermine complètement le comportement des solutions. Une différence notable néanmoins : la solution ne converge plus forcément vers un état stationnaire $p(x) > 0$ mais vers un état périodique en temps $p(t, x) = p(t + 1, x) > 0$.

Attardons nous seulement sur un exemple, le cas $f(t, u)$ KPP avec condition au bord de Neumann. Alors on peut voir que

$$\varphi(t) = e^{\int_0^t \partial_u f(s, 0) ds} \times e^{-t \int_0^1 \partial_u f(s, 0) ds}$$

satisfait

$$\partial_t \varphi - \partial_u f(t, 0)\varphi = - \left(\int_0^1 \partial_u f(s, 0) ds \right) \times \varphi.$$

Puisque cette fonction est positive, et par unicité de la fonction propre principale, on a que $\lambda_1 = \int_0^1 \partial_u f(s, 0) ds$. On arrive à une conclusion naturelle : si le taux de reproduction est positif en moyenne, alors la population croît (pas

à chaque instant, mais au sens où $u(t+1, \cdot) \geq u(t)$, alors que si le taux de reproduction est négatif en moyenne, alors la population va tendre vers 0.

Il est possible de retrouver ce résultat directement. En effet

$$e^{\int_0^t (\partial_u f(s,0) - \varepsilon) ds}$$

est sous-solution du problème linéaire, donc à multiplication par un petit facteur on peut en faire une sous-solution, au moins sur un certain intervalle de temps contenant $[0, 1]$, de l'équation non-linéaire. En particulier, lorsque $\lambda_1 > 0$ pour $\delta > 0$ petit, la solution de l'équation de réaction-diffusion avec donnée initiale δ satisfait

$$u(1, \cdot) \geq u(0, \cdot).$$

Par principe de comparaison

$$u(t+1, \cdot) \geq u(t, \cdot).$$

Puisque la solution est également bornée par M , on peut en déduire que, pour tout $s \in [0, 1)$,

$$u(s+k, x) \rightarrow u_\infty(s, x)$$

lorsque $k \in \mathbb{N}$ tend vers $+\infty$. Contrairement au cas homogène en espace, la limite ici peut dépendre de $s \in [0, 1)$. Alors il est clair que u_∞ est 1-périodique en temps, et de plus à l'aide d'estimations standard on obtient comme toujours que u_∞ est solution de l'équation de réaction-diffusion. L'unicité de cette solution périodique en temps, et la convergence pour toute solution non triviale peut être obtenue par des raisonnements similaires à la section précédente. Le cas $\lambda_1 \leq 0$ ne pose pas non plus de difficulté particulière : l'argument n'est pas trivial mais, encore une fois, les idées sont très proches de ce qu'on a déjà vu.

Chapitre 4

Phénomènes de propagation dans \mathbb{R}^N

Dans ce chapitre, on considère l'équation

$$\partial_t u = D\Delta u + f(u)$$

posée dans le domaine spatial \mathbb{R}^N tout entier, où $N \geq 1$. En particulier, il n'y a donc pas de condition au bord (en tout cas autre que la condition initiale). La donnée initiale est choisie

$$u_0 \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

$$u_0 \geq 0.$$

Puisque le domaine n'est pas borné, la continuité n'implique plus que u_0 est bornée, donc il est important d'ajouter cette hypothèse. En particulier, les théorèmes du chapitre II s'appliquent (existence d'une solution et principes de comparaison). On renvoie également à l'introduction du chapitre précédent, dans lequel on avait tenu une discussion similaire.

On choisira $f \in C^{1,\alpha}$ (i.e. sa dérivée est α -Hôlderienne pour un certain $0 < \alpha < 1$) d'un des types suivants :

— soit du type monostable

$$f > 0 \text{ sur } (0, 1) \text{ et } < 0 \text{ sur } (1, +\infty),$$

avec de plus

$$f'(0) > 0.$$

— soit du type bistable

$$f > 0 \text{ sur } (\theta, 1) \text{ et } < 0 \text{ sur } (0, \theta) \cup (1, +\infty),$$

où $\theta \in (0, 1)$ avec de plus

$$f'(0), f'(1) < 0 < f'(\theta)$$

ainsi que

$$\int_0^1 f > 0.$$

On remarque qu'on se restreindra dans ce chapitre au cas homogène, et qu'on a supposé un peu plus de régularité qu'auparavant, ce qui pourra simplifier certaines parties techniques (en particulier, on pourra faire appel à certaines propriétés du premier chapitre sur les équations différentielles).

4.1 Convergence locale uniforme

Remarquons tout d'abord qu'il est possible de comparer les solutions du problème dans \mathbb{R}^N avec les solutions du problème dans la boule B_R avec condition au bord de Dirichlet. En particulier, en choisissant R suffisamment grand (et si, dans le cas bistable, la donnée initiale est suffisamment grande), on peut en déduire que la solution ne peut pas converger vers 0. En fait, en réutilisant les mêmes sous-solutions, on peut montrer qu'il y a convergence vers un état stationnaire positif, qui ne peut être que 1.

Theorem 4.1.1 *Soit f du type monostable (avec $f'(0) > 0$), et u_0 une donnée initiale non identiquement nulle.*

Alors la solution converge localement uniformément vers 1.

Proof. En fait, dans le chapitre précédent et pour un domaine borné, on avait seulement traité le cas KPP. Mais la raison était l'unicité de la solution stationnaire positive, et l'hypothèse n'était pas nécessaire pour la construction de sous-solutions. Plus précisément, seule la positivité de $f'(0)$ et la régularité C^1 de f étaient utiles.

On admet qu'il existe une valeur propre principale λ_R du Laplacien avec condition de Dirichlet sur la boule B_R , associée à une fonction propre radiale $\varphi_R(x) = \varphi_R(|x|) > 0$ telle que

$$\begin{cases} \Delta\varphi_R = \lambda_R \varphi_R & \text{dans } B_R, \\ \varphi_R = 0 & \text{sur } \partial B_R, \\ \varphi_R > 0 & \text{dans } B_R, \end{cases}$$

et que

$$\lambda_R < 0.$$

En fait, la symétrie radiale de la fonction propre positive provient de son unicité à normalisation près : toute rotation est encore une fonction propre positive. Quant au fait que $\lambda_R > 0$, il suffit par exemple de remarquer que φ_R atteint nécessairement un maximum positif en un point x_0 dans B_R , et donc $\lambda_R = \frac{\Delta\varphi_R(x_0)}{\varphi_R(x_0)} < 0$.

Par conséquent, $\Delta\varphi_R < 0$ dans B_R et φ_R ne peut pas admettre de minimum local à l'intérieur du domaine. Finalement, par symétrie φ_R atteint son maximum (global) au centre et

$$\varphi_R(0) = 1$$

(on rappelle qu'on normalise toujours les fonctions propres pour que $\|\varphi\|_\infty = 1$).

De plus, on admet que

$$\lambda_R = -\frac{C}{R^2}$$

pour une constante universelle $C = -\lambda_1 > 0$ (ce qui peut se voir par changement d'échelle). Remarquons que la constante C dépend néanmoins de la dimension N .

On peut alors montrer que

$$\underline{u}_0(x) := \eta\varphi_R(x)$$

est sous-solution de l'équation de réaction-diffusion pour η petit et R grand, dans le sous-domaine B_R (pour les détails voir entre autres la preuve du théorème 3.2.18) - *existence d'une solution stationnaire*, dans lequel on avait utilisé sans le dire que la valeur propre principale dans le pavé $P_R = [-R, R]^N$ vaut explicitement $\frac{N\pi^2}{4R^2}$ en dimension N). En particulier, en étendant cette fonction par 0 en dehors de B_R et en la prenant comme condition initiale, on construit une solution $\underline{u}(t, x)$ croissante en temps qui converge vers un état stationnaire positif p . Mais cette convergence n'est plus uniforme en espace (le théorème d'Arzela-Ascoli ne fonctionne plus sur \mathbb{R}^N tout entier!). Par un procédé d'extraction diagonale, elle est localement uniforme (i-e uniforme sur tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$ fixé). Remarquons enfin que p est borné par au-dessus par 1, puisque 1 est sur-solution de l'équation.

Montrons maintenant que $p \equiv 1$. Remarquons que, puisque les solutions de l'EDO avec donnée initiale plus grande que 1 convergent vers 1, il est facile de montrer que tout état stationnaire borné q satisfait en fait $q \leq 1$. L'argument ci-dessous va en fait montrer qu'il n'existe aucun état stationnaire positif et borné autre que 0 et 1.

Rappelons que par construction, p n'est pas identiquement nulle (car $p(x) = \lim \underline{u}(t + t_n, x) > \underline{u}_0(x)$). Supposons par l'absurde que p n'est pas 1. Par principe de comparaison fort, on a

$$0 < p < 1.$$

Supposons que $\inf p > 0$. Alors par comparaison avec l'EDO, on obtiendrait que $p \equiv 1$. Supposons donc que $\inf p = 0$. En particulier, il existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$\eta = \underline{u}_0(0) > p(x_0).$$

L'idée est de translater la sous-solution \underline{u}_0 dans la direction $x_0 - 0$ en rapprochant progressivement les centres, jusqu'à obtenir un point de contact. Plus explicitement, soit

$$\gamma^* := \max\{\gamma \geq 0, \mid \underline{u}_0(x - \gamma x_0) < p(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N\}.$$

Alors il existe bien un point de contact x^* entre $\underline{u}_0(x^* - \gamma^* x_0)$ et $p(x^*)$, avec $p(\cdot) \geq \underline{u}_0(\cdot - \gamma^* x_0)$ partout. Ici on a utilisé le fait que le support de \underline{u}_0 est compact, de sorte que le contact ne peut jamais se produire à l'infini.

On remarque ensuite que les translats de $\underline{u}_0(\cdot)$ sont toujours sous-solutions. Donc, à l'aide du principe fort, on obtient que $p(\cdot) \equiv \underline{u}_0(\cdot - \gamma^* x_0)$ dans $B_R(x_0)$,

ce qui est une évidente contradiction (par exemple parce que cela forcerait p à s'annuler sur $\partial B_R(x_0)$, mais $p > 0$ dans \mathbb{R}^N). Finalement $p \equiv 1$.

Bien sûr, il est ensuite possible de montrer que toute solution avec donnée initiale non identiquement nulle converge localement uniformément vers 1. En effet, à l'aide du principe fort, $u(1, \cdot) > 0$ au temps $t = 1$. Par conséquent, quitte à réduire η dans la construction de la sous-solution, on peut supposer que $u(1, \cdot) \geq \underline{u}_0(\cdot)$ sur \mathbb{R}^N . Attention néanmoins, on utilise encore ici le fait que la sous-solution \underline{u}_0 a un support compact !

On peut alors appliquer un principe de comparaison pour obtenir

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) = 1.$$

Par un autre argument de comparaison avec les solutions de l'EDO ($\bar{u}'(t) = f(\bar{u}(t))$ avec condition initiale $\max\{1, \|u_0\|_\infty\}$), on obtient que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) = 1.$$

Grâce à la convergence localement uniforme de la sous-solution, et uniforme de la sur-solution, la convergence de u vers 1 est bien localement uniforme. ■

Remark 4.1.2 *Dans cette preuve on a utilisé le fait que u devient instantanément positive si $u_0 \not\equiv 0$, ce qu'on avait déjà remarqué dans les domaines bornés. Insistons sur le fait que cette propriété est particulièrement frappante dans \mathbb{R}^N : même si la donnée initiale a un support compact, ce n'est pas le cas de la solution même pour un temps très petit. On parle parfois de propagation à vitesse infinie, ce qui est une caractéristique des équations d'évolution paraboliques.*

Dans ce premier résultat, on a supposé que $f'(0) > 0$. Ce n'était pas nécessaire dans le cas d'un domaine borné avec condition au bord de Neumann. Dans le cas d'un domaine borné avec condition au bord de Dirichlet, c'était une conséquence de l'hypothèse KPP mais cette condition était aussi utile pour "compenser" l'effet néfaste de la frontière. Qu'en est-il ici alors qu'il n'y a pas de bord ?

Theorem 4.1.3 *Soit $p > 1 + \frac{2}{N}$ (on rappelle que N est la dimension du domaine). On suppose f monostable et satisfait l'inégalité*

$$f(u) \leq u^p$$

en un voisinage de 0.

Alors il existe certaines données initiales pour lesquelles la solution ne converge pas vers 1.

L'exposant $p^* := 1 + \frac{2}{N}$ est appelé l'exposant critique de Fujita. L'équation (dans \mathbb{R}^N)

$$\partial_t u = \Delta u + u^p$$

avec une donnée initiale $u_0 \geq 0$ ($\neq 0$) admet certaines solutions globales en temps lorsque $p > p^*$, mais aucune lorsque $1 < p < p^*$ (on parle alors d'*explosion* ou de *blow-up* en temps fini).

Remarquons que lorsque $p > 1$, la nonlinéarité $f(u) = u^p$ ne satisfait aucune des conditions sous lesquelles on a montré l'existence globale de solutions. Il est facile de voir, en regardant seulement les solutions de l'EDO associée, qu'il ne peut pas y avoir existence globale pour toute donnée initiale. L'idée est d'une part que, lorsque p est assez grand, la nonlinéarité devient petite pour u petit ; d'autre part, pour des solutions qui décroissent à l'infini, la diffusion tend à empêcher la solution d'exploser.

Proof. On se contentera du calcul en dimension 1. Soit

$$v(t, x) = \delta t^{-\alpha} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

où $\alpha > 0$ est à déterminer. Cette fonction est bornée sur $\{t > 1\} \times \mathbb{R}$. Quitte à diminuer δ , on peut supposer que

$$f(v) \leq v^p$$

pour tout $t \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\partial_t v = \left(\frac{x^2}{4t^2} - \frac{\alpha}{t} \right) v,$$

$$\partial_{xx} v = \left(\frac{x^2}{4t^2} - \frac{1}{2t} \right) v,$$

d'où

$$\partial_t v - \partial_{xx} v = \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \frac{1}{t} v.$$

On remarque que v est sur-solution lorsque $\alpha \leq 1/2$, ce qui est naturel puisque lorsque $\alpha = 1/2$ on retrouve la solution fondamentale de l'équation de la chaleur. Prenons $\alpha < 1/2$ dans le but d'absorber le terme de réaction.

On a ensuite, quand $t \rightarrow +\infty$, que

$$v^p = v^{p-1} \times v = O(t^{-\alpha(p-1)} v) = o(t^{-1} v)$$

si $\alpha(p-1) > 1$, autrement dit si $p > 1 + \frac{1}{\alpha}$.

Pour un tel p , il existe donc $T > 0$ tel que v satisfait

$$\partial_t v - \partial_{xx} v - v^p \geq 0$$

et v est une sur-solution de l'équation de réaction-diffusion sur $[T, +\infty) \times \mathbb{R}$. En particulier, pour toute donnée initiale sous $v(T, \cdot)$, la solution ne peut pas converger vers 1, et même elle converge vers 0.

Finalement, en prenant α arbitrairement proche de $1/2$, on retrouve l'exposant critique $p^* = 3$ de la dimension 1. ■

Remark 4.1.4 On pourra retenir de cette preuve que l'exposant critique est lié à la décroissance en temps de la solution fondamentale $\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$. En effet, l'exposant critique est égal à $1 + \frac{2}{N}$, et le terme $\frac{2}{N}$ est précisément l'inverse du taux (polynomial) de décroissance de la solution fondamentale. Dans la preuve, on voit que cette décroissance nous donne une marge de manoeuvre pour la construction de sur-solutions de l'équation de la chaleur, et donc sur les nonlinéarités qu'il est possible "d'absorber".

Remarquons également que l'exposant critique diminue lorsque la dimension N augmente : si on part d'une solution très localisée, elle diffusera d'autant plus qu'il y a de directions possibles, et elle aura donc d'autant moins tendance à exploser.

Passons ensuite au cas bistable. Bien sûr, dans ce cas il ne peut plus y avoir de hair-trigger. On souhaite néanmoins montrer le résultat suivant, semblable au théorème 3.2.21 dans les domaines bornés :

Theorem 4.1.5 Soit f du type bistable (on rappelle qu'on a déjà fait l'hypothèse $\int_0^1 f > 0$ en début de chapitre). Alors il existe une donnée initiale u_0 à support compact telle que la solution associée (et donc la solution pour toute autre donnée initiale plus grande) converge localement uniformément vers 1.

Proof. Comme dans la preuve du théorème 3.2.21, en utilisant une EDO bien choisie on construit une sous-solution radiale dans la boule $B_R(0)$ pour R assez grand (attention : en dimension quelconque la construction est légèrement plus compliquée, cf. la remarque 3.2.22). En choisissant comme donnée initiale cette sous-solution (étendue par zéro en dehors de B_R), on construit une solution qui converge localement uniformément vers un état stationnaire positif $p \leq 1$.

Montrons que $p \equiv 1$. Évidemment, 1 n'est pas ici le seul état stationnaire positif (il y a aussi θ , et en fait une infinité d'autres solutions qui oscillent autour de θ). Il faut donc utiliser ici le fait que le p qu'on a construit est dans un certain sens stable.

Tout d'abord, $p(0) > \gamma \in (\theta, 1)$, où γ est la valeur de la sous-solution en 0 (cf la preuve du théorème 3.2.21 du chapitre précédent). Montrons que

$$\inf p \geq \gamma.$$

L'argument est le même que dans la preuve du théorème 4.1.1 ci-dessus : si cette inégalité est fautive, on peut translater la sous-solution jusqu'à obtenir un point de contact entre p au-dessus et la translatée en-dessous, puis utiliser le principe fort pour aboutir à une contradiction.

Une fois cette inégalité prouvée, on compare p avec la solution de l'EDO qui a pour donnée initiale γ . Cette solution de l'EDO converge vers 1, d'où $p \equiv 1$.

Enfin, il est facile de retrouver la convergence vers 1 pour toute donnée initiale plus grande que la sous-solution : il suffit seulement de remarquer que $\limsup_{t \rightarrow \infty} u(t, \cdot) \leq 1$ par une nouvelle comparaison, cette-fois ci par au-dessus, avec les solutions de l'EDO. ■

4.2 Propagation dans \mathbb{R}^N : quelques éléments

Les théorèmes précédents nous permettent d'arriver à la véritable problématique de ce chapitre. Nous avons en effet montré que les solutions convergent (sous les hypothèses appropriées) vers l'état stationnaire positif 1. En dynamique des populations, cela signifie que l'espèce envahit le domaine et approche sa densité de saturation.

Néanmoins nous n'avons pas montré que cette convergence est uniforme. Si par exemple, dans le cas monostable, $\inf u_0 > 0$, alors c'est clairement le cas par comparaison avec les solutions de l'EDO. Mais le fait que la solution soit positive ne dit pas que son inf sur l'espace entier soit positif.

En fait, cela n'a aucune raison d'être vrai : si la donnée initiale est proche de 0 à l'infini, alors on peut imaginer que la solution, au moins en temps petit, sera également proche de 0 à l'infini. De même en fait, en temps grand : formellement, on peut imaginer que, puisque la donnée initiale tend vers 0 à l'infini, la solution de l'équation de réaction-diffusion tend quant à elle vers la solution de l'EDO avec donnée initiale 0, c'est-à-dire 0.

Mettons un peu de rigueur là-dedans et supposons dans un premier temps que f est linéaire :

$$\partial_t u = D\Delta u + Cu.$$

Alors la solution est donnée par la formule

$$u(t, x) = \frac{e^{Ct}}{(4D\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} dy.$$

Supposons par exemple que u_0 a un support compact K . Alors

$$u(t, x) = \frac{e^{Ct}}{\sqrt{4D\pi t}} \int_K u_0(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} dy.$$

Pour tout $t > 0$ fixé il est clair que $u(t, x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow \infty$. Ce serait vrai aussi si $u_0(x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow +\infty$, sans être nécessairement à support compact. Enfin, par un argument de comparaison et puisqu'il existe, sous nos hypothèses, un C tel que $f(u) \leq Cu$ pour tout $u \geq 0$, la même remarque s'étend immédiatement à l'équation de réaction-diffusion.

La problématique est donc la suivante : comment évolue dans le temps le domaine dans lequel la solution est proche de 1 ? A quelle vitesse s'étend la zone dans laquelle la solution est proche de 1, et à quelle vitesse réduit la zone dans laquelle la solution est proche de 0 ? On parle de phénomène de propagation car l'état 1 "envahit" l'état 0 dans \mathbb{R}^N .

4.2.1 Le cas linéaire

Une étude un peu plus approfondie du cas linéaire n'est pas inintéressante à ce stade. On considère donc l'équation

$$\partial_t u = D\Delta u + Cu,$$

avec moralement $C \approx f'(0) > 0$.

Supposons pour simplifier que

$$u_0 = \chi_{B_R}$$

où χ est la fonction caractéristique. Alors

$$u(t, x) = \frac{e^{Ct}}{\sqrt{4D\pi t}} \int_{B_R(x)} e^{-\frac{|y|^2}{4Dt}} dy.$$

Si $|x| < (2\sqrt{DC} - \varepsilon)t$ où $\varepsilon > 0$, alors

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{e^{Ct}}{\sqrt{4D\pi t}} \int_{B_R(x)} e^{-\frac{|y|^2}{4Dt}} dy \\ &\geq \frac{e^{Ct}}{\sqrt{4D\pi t}} |B_R| e^{-\frac{((2\sqrt{DC}-\varepsilon)t+R)^2}{4Dt}} dy \\ &\geq \frac{e^{Ct}}{\sqrt{4D\pi t}} |B_R| e^{-(C-\varepsilon)t+O(1)} dy \\ &\geq \frac{e^{\varepsilon't+O(1)}}{\sqrt{4D\pi t}} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

quand $t \rightarrow +\infty$.

Par contre, si $|x| > (2\sqrt{DC} + \varepsilon)t$ où $\varepsilon > 0$, alors

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{e^{Ct}}{\sqrt{4D\pi t}} \int_{B_R(x)} e^{-\frac{|y|^2}{4Dt}} dy \\ &\leq \frac{e^{Ct}}{\sqrt{4D\pi t}} |B_R| e^{-\frac{((2\sqrt{DC}+\varepsilon)t-R)^2}{4Dt}} dy \\ &\leq \frac{e^{Ct}}{\sqrt{4D\pi t}} |B_R| e^{-(C+\varepsilon)t+O(1)} dy \\ &\leq \frac{e^{-\varepsilon't+O(1)}}{\sqrt{4D\pi t}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quand $t \rightarrow +\infty$.

Par conséquent, si on regarde n'importe quelle ligne de niveau $\{u(t, \cdot) = \alpha\}$ pour $\alpha > 0$ fixé, alors elle va se situer en

$$|x| = 2\sqrt{DC}t + o(t).$$

On pourrait même affiner le calcul : le premier terme annule l'exponentielle à l'intérieur de l'intégrale, le second va annuler la racine à l'extérieur de l'intégral (c'est un peu plus compliqué que ça du fait des résidus du premier terme en fait), ce qui devrait donner

$$|x| = 2\sqrt{DC}t + \gamma \ln t + o(\ln t)$$

avec γ une constante (négative) bien choisie.

Ici on se contente de remarquer que dans un certain sens (i.e. à un $o(t)$ près), la solution se propage à une vitesse finie bien déterminée qui est $2\sqrt{DC}$. Nous chercherons à étendre ce type de résultats à l'équation semi-linéaire de réaction-diffusion.

Remark 4.2.1 *Toute donnée initiale non triviale, à support compact et bornée peut être "coincée" entre deux fonctions indicatrices (à multiplication par des facteurs près, ce qui ne pose aucun problème dans le cas linéaire), et par comparaison on retrouve que la vitesse de propagation en temps grand est toujours $2\sqrt{DC}$.*

De plus, les mêmes calculs fonctionnent clairement en dimension supérieure, et la vitesse est là encore $2\sqrt{DC}$ dans toutes les directions tant que la donnée initiale à support compact. A l'ordre supérieur par contre, la constante γ change. Cela peut s'interpréter comme une conséquence de la courbure des lignes de niveaux, qu'on imagine sphériques : la diffusion dans la direction orthogonale tend à ralentir (un peu) la propagation. Ici nous nous arrêterons essentiellement à la vitesse asymptotique de la propagation, et nous ne nous soucierons pas des termes d'ordre supérieur.

4.2.2 Le cas KPP en dimension 1

Regardons maintenant l'équation de réaction-diffusion où $f(u)$ est KPP, i.e. monostable et

$$f(u) \leq f'(0)u$$

pour tout $u \geq 0$. Dans ce paragraphe, nous supposons que la dimension $N = 1$.

Alors nous pouvons déjà montrer le théorème suivant :

Theorem 4.2.2 *Soit u_0 une donnée initiale à support compact, bornée, positive et non identiquement nulle. Alors la solution de l'équation KPP dans \mathbb{R} satisfait :*

$$\begin{aligned} \forall c > 2\sqrt{Df'(0)}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \geq ct} |u(t, x)| &\rightarrow 0, \\ \forall 0 < c < 2\sqrt{Df'(0)}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \leq ct} |1 - u(t, x)| &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Proof. Tout d'abord, il est facile de voir que les exponentielles

$$Ae^{-\lambda(x-ct)}$$

sont des sur-solutions lorsque

$$D\lambda^2 - c\lambda + f'(0) = 0,$$

qui admet des solutions réelles positives

$$\lambda = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4Df'(0)}}{2D}$$

si et seulement si $c \geq 2\sqrt{Df'(0)}$. En particulier, la convergence de u vers 0 en dehors des boules de rayon ct suit immédiatement. En effet, si l'exponentielle plus haut ne permet que de borner la propagation de la solution vers la droite, une symétrie immédiate permet de borner aussi la propagation vers la gauche.

Fixons ensuite $c \in [0, 2\sqrt{Df'(0)})$ et montrons qu'il existe δ tel que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \inf_{|x| \leq ct} u(t, x) \geq \delta.$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $2\sqrt{D(f'(0) - 2\varepsilon)} > c$, et η tel que

$$\forall 0 \leq u \leq \eta, \quad f(u) \geq (f'(0) - \varepsilon)u.$$

Considérons alors $\alpha + i\beta$ une solution complexe de

$$\lambda^2 - c\lambda + f'(0) - \varepsilon = 0.$$

Soit alors $\delta > 0$ une petite constante à déterminer, et la fonction

$$\delta \cos(\beta(x - ct))e^{-\alpha(x-ct)}$$

satisfait

$$\partial_t u - \partial_{xx} u - (f'(0) - \varepsilon)u = 0.$$

L'idée est d'en déduire une sous-solution à support compact. Pour cela, on définit \underline{u}^c qui vaut

$$\delta \cos(\beta(x - ct))e^{-\alpha(x-ct)}$$

lorsque $\beta(x - ct) \in [-\pi/2, \pi/2]$ et 0 ailleurs.

Puisque

$$\alpha = \frac{c}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4D(f'(0) - \varepsilon) - c^2}}{2},$$

on peut choisir δ assez petit tel que, pour tout $c \leq 2\sqrt{D(f'(0) - 2\varepsilon)}$,

$$\underline{u}^c(0, \cdot) \leq \eta.$$

De plus, le support de $\underline{u}^c(0, \cdot)$ est inclus dans $[-L, L]$ où L ne dépend pas de $c \in [0, 2\sqrt{D(f'(0) - 2\varepsilon)}]$. En particulier, d'après la convergence localement uniforme de toute solution positive non identiquement nulle u vers 1, il existe T qui ne dépend pas de $c \leq 2\sqrt{D(f'(0) - 2\varepsilon)}$ tel que

$$u(T, \cdot) \geq \underline{u}^c(0, \cdot).$$

Malheureusement, \underline{u}^c n'est pas C^2 (au bord de son support), et ce n'est donc pas une sous-solution classique : on parle de sous-solution généralisée. Montrons brièvement pourquoi le principe de comparaison s'applique ici, malgré ce manque de régularité.

Notons

$$v(t, x) = u(t + T, x + ct),$$

qui satisfait

$$\partial_t v = D\partial_{xx}v + c\partial_x v + f(v).$$

De même, la fonction $\underline{u}^c(t, x + ct)$ est une sous solution de cette équation dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$, et vaut 0 au bord de ce même intervalle. On peut donc appliquer le principe de comparaison sur $[-\pi/2, \pi/2]$, et avec la positivité de v on en déduit que

$$u(t + T, x + ct) = v(t, x) \geq \underline{u}^c(t, x + ct).$$

Remark 4.2.3 *Ces détours auraient pu être évités si on avait énoncé des principes de comparaison plus généraux au chapitre II. En effet, certains types de singularités n'invalident pas le principe de comparaison (ce dont on peut se convaincre sur un dessin), et il est également possible de considérer des domaines qui changent au cours du temps (sous des hypothèses raisonnables).*

En particulier,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} u(t + T, ct) \geq \delta.$$

Puisque le choix de T et δ ne dépendait pas de c , on a alors

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \inf_{|x| \leq 2\sqrt{D(f'(0) - \varepsilon)} \times t - C} u(t, x) \geq \delta$$

où

$$C = 2\sqrt{Df'(0)}T.$$

Remarquons que les sous-solutions construites plus haut ne bougeaient que vers la droite, ce qui ne donne donc une borne inférieure sur $u(t, x)$ que lorsque $0 \leq x \leq \sqrt{D(f'(0) - 2\varepsilon)}t$. Mais puisque $\underline{u}_c(t, -x)$ est également sous-solution, la même borne s'obtient facilement sur $0 \geq x \geq -\sqrt{D(f'(0) - 2\varepsilon)}t$.

Il reste à montrer que u converge vers 1. Tout d'abord, par comparaison avec l'EDO, nous savons déjà que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \sup_{\mathbb{R}} u(t, x) \leq 1.$$

Montrons donc que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \inf_{|x| \leq 2\sqrt{D(f'(0) - 2\varepsilon)} \times t} u(t, x) \geq 1.$$

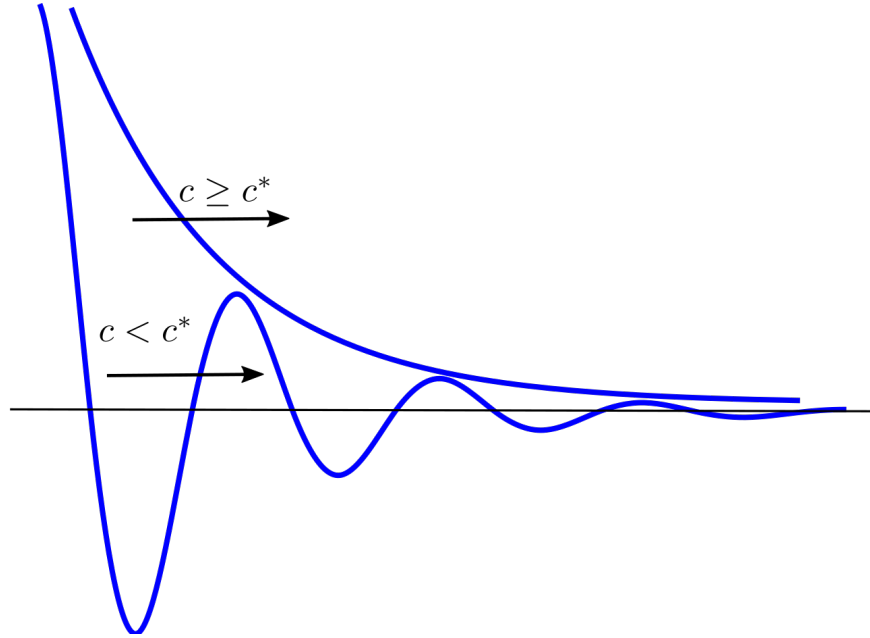
Nous procédons pour cela par l'absurde. Soit (t_n, x_n) une suite de points telle que $|x_n| \leq 2\sqrt{D(f'(0) - 2\varepsilon)}t_n$ et

$$\lim u(t_n, x_n) < 1.$$

Par les estimations paraboliques standard, $u(t_n + t, x_n + x)$ converge vers une solution u_∞ de l'équation de réaction-diffusion sur l'intervalle de temps $(-\infty, +\infty)$. D'après notre raisonnement ci-dessus, nous savons que $u_\infty \geq \delta$ et, par construction, $u_\infty < 1$ (au point $(0, 0)$ donc partout par le principe fort). Par comparaison avec l'EDO, c'est impossible. Finalement on a montré que u converge vers 1 uniformément sur les boules de rayons $2\sqrt{D(f'(0) - 2\varepsilon)}$. La constante ε est arbitrairement petite et cela conclut donc la preuve. \blacksquare

Remark 4.2.4 *En ce qui concerne la dernière partie de la preuve, il existe plusieurs méthodes similaires. Par exemple, on peut raisonner par l'absurde en prenant une suite de points où la fonction ne tend pas vers 1. On prend ensuite une sous-solution plus rapide. Puis dans l'intervalle de temps $(c' - c)t_n$ (où c' est la vitesse de la sous-solution et c une estimation de la vitesse de la suite de points), on compare avec une solution dans le repère immobile. On obtient une contradiction.*

Cette preuve tire manifestement partie des solutions exponentielles $e^{-\lambda(x-ct)}$ du problème linéaire. La vitesse $2\sqrt{Df'(0)}$, qu'on note parfois aussi c^* , distingue les solutions exponentielles réelles des solutions exponentielles complexes, qui en en prenant la partie réelle donnent des solutions oscillantes.



Insistons sur l'importance du choix de données initiales à support compact. En effet, si la donnée initiale décroît trop lentement vers 0 lorsque $|x| \rightarrow +\infty$, alors il ne sera pas possible de comparer la solution avec les sur-solutions exponentielles $e^{-\lambda(x-ct)}$, puisqu'a priori la comparaison ne sera pas vraie au temps $t = 0$.

Theorem 4.2.5 *Toujours en dimension $N = 1$, si la donnée initiale satisfait*

$$u_0(x) \leq e^{-\sqrt{\frac{f'(0)}{D}}|x|},$$

alors la solution propage à la vitesse $2\sqrt{Df'(0)}$.

Si la donnée initiale satisfait

$$u_0(x) \sim e^{-\lambda|x|}$$

quand $|x| \rightarrow +\infty$ avec $0 < \lambda < \frac{f'(0)}{D}$, alors la solution propage à la vitesse $c_\lambda = \frac{D\lambda^2 + f'(0)}{\lambda}$.

Pour simplifier l'énoncé, on a parlé de "propagation à la vitesse...". Cela signifie simplement que la conclusion du théorème 4.2.2 est vraie, en y remplaçant $2\sqrt{Df'(0)}$ par la vitesse en question.

Proof. On ne donne pas de détails. La première partie se prouve exactement comme le précédent théorème, puisque l'hypothèse permet justement de placer les sur-solutions exponentielles

$$e^{\pm\sqrt{\frac{f'(0)}{D}}(x \pm 2\sqrt{Df'(0)}t)}$$

au-dessus de la donnée initiale.

La deuxième partie est un peu plus difficile, en tout cas elle diffère de ce qu'on a fait précédemment. On peut au moins remarquer que

$$e^{\pm\lambda(x \pm c_\lambda t)}$$

donnent deux sur-solutions, et par conséquent la solution ne peut pas propager plus vite que c_λ . Comme souvent, c'est la construction de sous-solutions qui est plus difficile. Un calcul tirant parti de la régularité $C^{1,\alpha}$ de f permet cependant de vérifier que

$$\underline{u}(t, x) = \max\{0, e^{-\lambda(x - c_\lambda t)} - B e^{-(\lambda + \delta)(x - c_\lambda t)}\}$$

est une sous-solution sur son support, à condition de bien choisir les constantes positives δ (petite) et B (grande). Cette sous-solution peut ensuite être utilisée pour prouver que la vitesse de propagation est bien exactement c_λ . ■

4.2.3 Un mot sur le cas KPP en dimension supérieure

On évoque seulement brièvement le cas KPP en dimension supérieure à 1, sans donner les détails des preuves qui y deviennent plus techniques. En fait, le théorème 4.2.2 y est toujours vrai, à condition d'y interpréter $|x|$ comme la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^N$, et les arguments sont même assez similaires. Un aspect intéressant de la dimension supérieure est qu'on peut y reconnaître la notion de valeur propre principale, qu'on a déjà introduite au chapitre précédent et qui, d'une certaine manière, est cachée dans la preuve du théorème 4.2.2.

Plaçons nous d'abord dans un contexte différent, celui d'un domaine cylindrique. Supposons $N \geq 2$ et considérons l'équation de réaction-diffusion

$$\partial_t u = D\Delta u + f(u)$$

dans $\mathbb{R} \times \omega$, où ω est un ouvert borné à frontière régulière de \mathbb{R}^{N-1} . A cette équation dans le domaine, nous ajoutons une donnée initiale (continue et bornée, à support compact) et une condition au bord de Dirichlet

$$u|_{\mathbb{R} \times \partial\omega} = 0.$$

Remarquons que nous n'avons jamais traité un tel domaine (i.e. non borné mais avec une frontière), et nous admettons donc ici que le problème est typiquement bien posé, et satisfait un principe de comparaison.

En dimension 1, la preuve consistait essentiellement à trouver des solutions du problème linéarisé en 0 sous la forme d'exponentielles. Lorsque le facteur de l'exponentielle est réel, on obtenait une sur-solution et, lorsqu'il est complexe, on pouvait construire une sous-solution. Une extension naturelle de cette méthode consisterait ici à chercher des solutions particulières du problème linéarisé (i.e. en remplaçant $f(u)$ par $f'(0)u$) sous la forme

$$e^{-\lambda(x_1-ct)}\phi(x_2, \dots, x_N),$$

où ϕ est une fonction positive dans ω , et où bien sûr on a noté $(x_1, x_2, \dots, x_N) = x \in \mathbb{R}^N$. La condition de Dirichlet fait qu'il n'est pas possible ici de se passer de la fonction ϕ .

On se rend compte alors, en plaçant cet ansatz dans l'équation linéarisée, que

$$D\Delta\phi + (D\lambda^2 - c\lambda + f'(0))\phi = 0,$$

avec $\phi > 0$ dans ω et $\phi|_{\partial\omega} = 0$. Autrement dit ϕ est la fonction propre principale du Laplacien dans ω avec condition au bord de Dirichlet, et $-(\lambda^2 - c\lambda + f'(0))$ en est la valeur propre principale, qu'on notera Λ_ω . On peut montrer que cette valeur propre principale est négative, et on obtient alors une simple équation polynomiale d'ordre 2 en λ , paramétrée par le choix de la vitesse c :

$$D\lambda^2 - c\lambda + f'(0) + \Lambda_\omega.$$

Si $f'(0) + \Lambda_\omega < 0$, il existe une solution réelle positive quel que soit $c \geq 0$, donc la vitesse de propagation est nulle (en fait, la solution converge même uniformément vers 0). Si $f'(0) + \Lambda_\omega > 0$, on retrouve la même situation qu'en dimension 1, c'est-à-dire un $c(\omega)$ critique au-dessus (respectivement en-dessous) duquel les solutions sont réelles et positives (respectivement complexes). Le premier cas se produit typiquement lorsque ω est petit, et le second lorsque ω est grand.

Formellement (et bien sûr on peut le montrer rigoureusement), la valeur $c(\omega)$ doit donc être la vitesse de propagation des solutions lorsque la donnée initiale est à support compact.

Le cas de la propagation dans \mathbb{R}^N peut être traité par le même genre d'argument. La construction de sur-solutions aux vitesses $c \geq 2\sqrt{Df'(0)}$ ne pose pas de problème (il suffit de prendre $e^{-\lambda(x-e-ct)}$ avec e n'importe quel vecteur

unitaire), mais la difficulté est du côté des sous-solutions, qu'il faut forcer à s'annuler dans toutes les directions.

Un moyen est d'utiliser les sous-solutions du problème cylindrique ci-dessus, avec $\omega = B_R$ la boule de rayon R dans \mathbb{R}^{N-1} . Parce qu'on a choisi une condition au bord de Dirichlet, il est en effet possible de les utiliser comme sous-solutions du problème posé dans l'espace \mathbb{R}^N entier (attention : le support de ces sous-solutions n'étant pas un domaine régulier, il n'est pas possible d'appliquer le principe de comparaison du chapitre II ; néanmoins on pourrait vérifier "à la main" que ça ne pose pas de problème ici). Lorsque $R \rightarrow +\infty$, on a que la valeur propre $\Lambda_{B_R} \rightarrow 0$ (on l'a déjà montré en début de ce chapitre), et par conséquent $c(B_R) \rightarrow 2\sqrt{Df'(0)}$. Finalement, on peut construire des sous-solutions à support compact à des vitesses arbitrairement proches de $c(B_R)$, donc de $2\sqrt{Df'(0)}$.

Encore une fois, il ne s'agit ici que d'esquisser l'essence des preuves, en ignorant sciemment les détails techniques.

En conclusion de cette section, l'avantage du cas KPP est que, comme dans des domaines bornés, il est possible de faire un certain nombre de calculs explicites. Ici et dans la section précédente, on a utilisé les solutions du problème linéaire dont on connaît la vitesse de propagation. Lorsque l'équation n'est pas du type KPP, la vitesse de propagation ne pourra plus être déterminée ainsi et le phénomène devient véritablement "non-linéaire". Selon le temps, nous montrerons un théorème similaire à ci-dessus. Nous commencerons par introduire la notion de front de propagation qui en quelque sorte remplaceront les exponentielles mobiles du cas linéaire.

4.3 Fronts de propagation

On s'intéresse dans cette section à des solutions particulières appelées les fronts de propagation. Dans cette section, on se placera dans la dimension 1 d'espace, donc $x \in \mathbb{R}$ et l'équation de réaction-diffusion

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + f(u).$$

A nouveau on suppose que $D = 1$: le cas $D \neq 1$ ne pose aucune difficulté particulière mais cela nous permettra néanmoins de simplifier certains calculs.

Definition 4.3.1 *Un front de propagation est une solution particulière de l'équation de réaction-diffusion de la forme $u(t, x) = U(x - ct)$, où $c \in \mathbb{R}$ et U satisfait les conditions suivantes :*

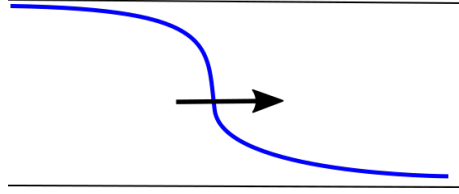
$$0 < U < 1,$$

$$U(+\infty) = 0 \text{ et } U(-\infty) = 1.$$

La constante c est appelée la vitesse du front et la fonction U son profil.

On pourra faire un dessin pour expliciter cette définition : c'est une solution dont la forme (le profil) ne change pas au cours du temps, mais simplement

se déplace à une vitesse constante (typiquement positive : 1 envahit 0). Ce type de solution apparait habituellement et naturellement dans des équations hyperboliques, telles que l'équation de transport ou des ondes. Ces solutions n'ont pas la même portée dans le cas parabolique, mais ils s'avèrent qu'elles sont importantes pour le comportement en temps grand des solutions.



Remarquons en effet que, dans le cas linéaire et par extension dans le cas KPP, nous avons beaucoup utilisé des solutions particulières de type exponentielle dont la forme ne changeait pas dans un repère mobile approprié. En quelque sorte, les exponentielles sont les fronts du problème linéaire et on a bien vu qu'elles permettaient de décrire la propagation des solutions.

Dans cette section, nous allons construire des fronts de propagation. Pour cela, il faut résoudre l'équation

$$U'' + cU' + f(U) = 0$$

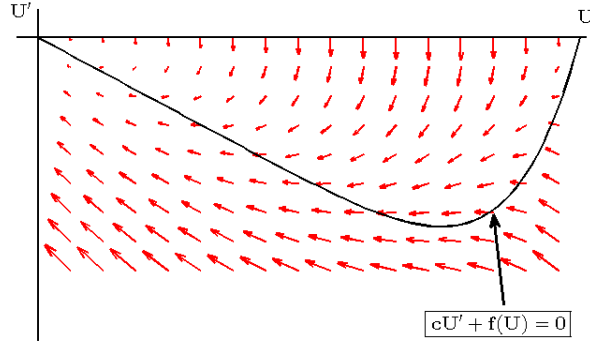
à la fois en c et en U , tout en respectant bien sûr les conditions de la définition ci-dessus. En effet il est clair que $U(x - ct)$ est solution de l'équation de réaction-diffusion si et seulement si U satisfait cette équation.

Une équation d'ordre 2 peut se réécrire comme un système de deux équations d'ordre 1 :

$$\begin{cases} p' = q, \\ q' = -cq - f(p). \end{cases}$$

On commencera d'abord par dessiner le plan de phase, dans les cas monostable et bistable. Bien sûr, la forme exacte du plan de phase dépend du paramètre c , qui est aussi à déterminer ! Plus bas, on trace le plan de phase pour une équation monostable (et même KPP).

Il est clair que dans le cas monostable, le système admet 2 états d'équilibre, et 3 dans le cas bistable. De quels types sont ces états d'équilibre ? Comme on l'a décrit au premier chapitre, il suffit généralement de regarder le problème linéarisé au voisinage de chacun de ces points d'équilibre. On pourra ici soit admettre que les solutions du problème non linéaire se comportent de la même manière (et renvoyer à la preuve qui est faite dans le premier chapitre), ou supposer pour simplifier que f est linéaire dans des voisinages de 0 et de 1, auquel cas les solutions peuvent y être calculées explicitement.



Quoiqu'il en soit, le problème linéarisé autour d'un état d'équilibre $(\alpha, 0)$ est

$$\begin{cases} p' = q, \\ q' = -cq - f'(\alpha)p. \end{cases}$$

De manière équivalente,

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(\alpha) & -c \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on obtient dans le cas monostable :

- Lorsque $0 \leq c < 2\sqrt{f'(0)}$, les valeurs propres de (la matrice du problème linéarisé en) $(0, 0)$ sont complexes, ce qui signifie que toute solution proche de $(0, 0)$ doit changer de signe.
- Lorsque $c \geq 2\sqrt{f'(0)}$ les valeurs propres de $(0, 0)$ sont

$$\frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2}.$$

Elles sont réelles et négatives. Dans le cas critique $c = 2\sqrt{f'(0)}$ la valeur propre est de multiplicité 2.

- Le point $(1, 0)$ est un point selle, dont les valeurs propres sont

$$\frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(1)}}{2}.$$

En effet l'une est positive et l'autre négative puisque $f'(1) < 0$.

En ce qui concerne le cas bistable :

- Le point $(0, 0)$ est un point selle, dont les valeurs propres sont

$$\frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2}.$$

- Le point $(1, 0)$ est toujours aussi un point selle, dont les valeurs propres sont

$$\frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(1)}}{2}.$$

- Enfin, les valeurs propres de $(\theta, 1)$ sont soit complexes si $c < 2\sqrt{f'(\theta)}$, soit négatives si $c \geq 2\sqrt{f'(\theta)}$.

Remark 4.3.2 *Il peut être déstabilisant de remarquer que 0, qui est un état instable dans l'équation de réaction-diffusion monostable, devient stable dans l'équation qui caractérise le front. Cela vient du changement de variable $x - ct$: lorsque $x - ct \rightarrow +\infty$, alors (pour peu que $c > 0$, ce qui est typiquement le cas) $t \rightarrow -\infty$. Le fait que le front s'approche de 0 en $+\infty$ signifie bien qu'il s'éloigne au contraire de 0 lorsque t augmente.*

Revenons maintenant sur la définition d'un front. Un tel front est associé à une trajectoire dans le plan de phase qu'on pourra dessiner (réciproquement, à une trajectoire dans le plan de phase est associée une solution $u(\cdot)$ de $u'' + cu' + f(u) = 0$, unique à translation près) : cette trajectoire doit rester dans la bande $\{0 < u < 1\}$, et connecter $(1, 0)$ à $(0, 0)$.

Il est clair que si $(0, 0)$ est instable ou ses valeurs propres sont complexes, une telle trajectoire ne peut pas exister (en tout cas, c'est clair si on admet que les trajectoires du problème non linéaire sont du même type que dans le problème linéaire). Il est clair aussi que la trajectoire du front est forcément la trajectoire instable du point selle $(1, 0)$, dont on sait qu'elle est unique (plus précisément, il y en a deux mais l'autre donne une solution supérieure à 1, ce que l'on a écarté dans notre définition des fronts). Finalement, la question est : est-ce que cette trajectoire converge vers $(0, 0)$ sans traverser l'axe des ordonnées ?

Avant d'écrire le résultat, mentionnons une rapide interprétation mécanique. En effet, l'équation

$$u'' + cu' + f(u) = 0$$

peut être vue comme une équation de mécanique du point. Alors u représente la position d'un point (ou plus prosaïquement, d'une bille), donc u'' est son accélération et cu' est un terme de frottement, d'autant plus fort que c augmente. Le terme $f(u)$ correspond à une force qui dépend ainsi de la position. Grossièrement, on peut imaginer que la bille évolue sur la courbe de la fonction potentiel F , où F est une primitive de f : la bille a alors tendance à rouler selon la pente de cette courbe, dont f est justement la dérivée. Une fois le dessin de F tracé, on comprend facilement qu'une bille qui part (infiniment près) de 1 sans vitesse va s'arrêter sur 0 à condition que le frottement soit suffisamment fort (dans le cas monostable) ou si le frottement n'est ni trop fort, ni trop faible (dans le cas bistable).

Theorem 4.3.3 *Si f est monostable, alors il existe $c^* \geq 2\sqrt{f'(0)}$ tel que : il existe un front de vitesse c si et seulement si $c \geq c^*$. Si de plus f est KPP dans le sens $f(u) \leq f'(0)u$, alors $c^* = 2\sqrt{Df'(0)}$.*

Si f est bistable, alors il existe une unique vitesse $c^ > 0$ tel qu'il existe un front de vitesse c^* .*

Remark 4.3.4 *On remarquera que dans le cas KPP, on retrouve la constante $2\sqrt{f'(0)}$ qui était la vitesse de propagation pour des données initiales à support compact. Cela peut laisser présager de la suite : la vitesse de propagation sera également associée aux vitesses des fronts dans le cas non KPP. Par ailleurs, dans le cas KPP on a également mentionné qu'il était possible, pour certaines données initiales, de propager à une vitesse plus grande que c^* : c'est cohérent avec ce nouveau théorème qui nous dit qu'il existe également des fronts pour de telles vitesses.*

Proof. Une preuve de ce théorème peut se trouver dans des articles de Aronson et Weinberger dans les années 70. Considérons dans un premier temps le cas monostable. Ici on passera certains détails, liés aux propriétés du système d'équations différentielles que l'on a admises.

Tout d'abord considérons le cas monostable. Il est clair, d'après l'étude du plan de phase plus haut, que la trajectoire du front doit coïncider avec la trajectoire instable du point selle $(1, 0)$. Comme on l'a dit plus haut, la question est donc de savoir si cette trajectoire (appelons la T_c) converge vers $(0, 0)$ sans sortir de la partie appropriée du plan de phase.

Tout d'abord, lorsque $c < 2\sqrt{Df'(0)}$, la réponse est non puisque les trajectoires spiralent dans un voisinage de $(0, 0)$. Considérons ensuite $c > 2\sqrt{\sup \frac{f(u)}{u}}$. En particulier $c > 2\sqrt{f'(0)} > 0$. Il est alors possible de montrer que la trajectoire instable T_c de $(1, 0)$ ne peut pas intersecter la droite

$$u' = -\frac{c}{2}u.$$

dans le quart de plan $\{u > 0 \text{ et } u' < 0\}$. En effet, elle démarre de $(1, 0)$, donc au-dessus de cette droite. Supposons par contradiction qu'il existe un point d'intersection. La solution U correspondant à T_c satisfait donc qu'il existe $z_0 \in \mathbb{R}$ et à la fois

$$U''(z_0) = -cU'(z_0) - f(U(z_0)),$$

et

$$U'(z_0) = -\frac{c}{2}U(z_0).$$

D'où, puisque $c > 2\sqrt{\sup \frac{f(u)}{u}}$,

$$U''(z_0) > -\frac{c}{2}U'(z_0).$$

C'est une contradiction car cela signifie que $(U(z), U'(z))$ se situe sous la droite, sur un voisinage à gauche de z_0 : autrement dit la trajectoire T_c était déjà sous la droite.

Dans le cas KPP, cela conclut déjà (presque) la preuve. En effet, dans ce cas on a $2\sqrt{\sup \frac{f(u)}{u}} = c^*$. L'argument ci-dessus s'applique donc pour tout $c > c^*$. Il est de plus clair que la trajectoire ne peut traverser ni l'axe des abscisses,

ni l'axe vertical $\{u = 1\}$, par conséquent elle ne peut que converger vers l'état d'équilibre $(0, 0)$, donc un front y est associé. Il ne resterait qu'à traiter le cas $c = c^*$, ce qui pourrait en fait être fait en affinant l'argument ci-dessus.

Puisque nous souhaitons ici traiter le cas monostable général, nous procédons autrement. L'observation clé est de remarquer que la trajectoire T_c dépend de manière monotone en c . Cette observation suit d'ailleurs l'interprétation mécanique qu'on peut faire du problème.

En effet, la valeur propre positive de $(1, 0)$ est

$$\frac{-c + \sqrt{c^2 - 4f'(1)}}{2}.$$

Cette fonction est décroissante en c . Cela signifie que, si $c_1 > c_2$, alors la trajectoire qui part de $(1, 0)$ pour $c = c_1$ est au-dessus de celle pour $c = c_2$, au moins dans un voisinage de $(1, 0)$. On pourra appeler T_1 et T_2 ces deux trajectoires, et u_1 et u_2 deux solutions correspondantes. On peut ensuite vérifier par contradiction que ces deux trajectoires ne s'intersectent pas dans la partie $\{u' < 0 \text{ et } 0 < u < 1\}$ du plan de phase.

En effet, si c'est le cas, on obtient à translation près :

$$u_1(0) = u_2(0) \quad , \quad u_1'(0) = u_2'(0)$$

et donc

$$u_1''(0) = -c_1 u_1'(0) - f(u_1(0)) > -c_2 u_2'(0) - f(u_2(0)) = u_2''(0).$$

En reportant dans le plan de phase, cela signifie que T_1 passe toujours au-dessus de T_2 après une intersection. Une intersection ne peut donc pas exister. On pourra s'aider d'un dessin pour préciser cet argument, et remarquer que par construction, le vecteur tangent à une trajectoire de l'équation différentielle en un point (p, q) est toujours donné par $(q, -cq + f(p))$.

Cette monotonie en c nous apprend, ainsi qu'un rapide regard sur le plan de phase, que l'ensemble des c tels qu'il existe un front est de la forme

$$[c^*, +\infty)$$

ou

$$(c^*, +\infty).$$

La valeur c^* est forcément finie puisqu'on a vu qu'il existait des fronts lorsque c est assez grand.

Il ne reste plus qu'à prouver qu'il existe également un front de vitesse c^* . Il suffit d'un argument de continuité : si la trajectoire T_{c^*} lorsque $c = c^*$ ne donne pas un front, alors elle traverse l'axe des ordonnées. Par conséquent, on peut montrer que pour $c > c^*$ très proche de c^* , la trajectoire traverse encore l'axe des ordonnées. Si les trajectoires partaient d'un point qui n'est pas un état d'équilibre, il ne s'agirait que de la continuité des solutions d'une équation différentielle en un paramètre (qui peut s'obtenir par principe de comparaison,

comme on l'a vu au chapitre I). Ici c'est un peu plus complexe car il s'agit de la trajectoire instable d'un état d'équilibre. Néanmoins, si on suppose f linéaire au voisinage de 1, ou si plus généralement on admet que les trajectoires sont très proches de celles du problème linéarisé, on peut montrer que la trajectoire pour c proche de c^* est proche de la trajectoire pour $c = c^*$ au voisinage de $(1, 0)$, puis on peut utiliser un argument de continuité des solutions d'une équation différentielle à la fois en un paramètre et en la donnée initiale. On omettra sans doute cette partie de l'argument, qui peut être compréhensible sans en fournir une preuve rigoureuse.

Considérons ensuite le cas bistable. Il est toujours vrai que quand $c \leq 0$, la trajectoire sort de la zone $\{0 < u < 1 \text{ et } u' < 0\}$ en traversant l'axe des ordonnées. En effet, on a déjà montré (voir la preuve du théorème 3.2.21 dans le chapitre III), lorsque $c = 0$, que la trajectoire qui part d'un point $(\gamma, 0)$ avec $\gamma < 1$ mais proche de 1, traverse l'axe des ordonnées. Rappelons que l'hypothèse $\int_0^1 f > 0$ intervient ici (si cette intégrale était négative, le problème serait inversé et c'est un front de vitesse négative qu'il faudrait construire). Puisque deux trajectoires ne peuvent s'intersecter (d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz), la trajectoire instable de $(1, 0)$ traverse également l'axe des ordonnées. On peut vérifier que le même argument fonctionne quand $c \leq 0$, ou même par continuité quand c est proche de 0.

Par contre, lorsque c est grand, la trajectoire converge vers $(\theta, 0)$: il suffit de remarquer que la restriction de f à $[\theta, 1]$ est du type monostable. Par un argument de continuité, on peut montrer qu'il existe au moins un c tel que la trajectoire instable de $(1, 0)$ converge vers le point selle $(0, 0)$ tout en restant dans la bonne partie du plan de phase : cela donne un front. Sans rentrer dans les détails, on peut montrer que l'ensemble des c tels que la solution sort de la zone $\{0 < u < 1 \text{ et } u' < 0\}$ par l'axe des ordonnées est un ouvert, donc par monotonie c'est un intervalle $(-\infty, c_1)$. De même que l'ensemble des c tels que la solution sort de cette même zone par l'axe des abscisses, qui est un intervalle de la forme $(c_2, +\infty)$. Nécessairement, il existe un front pour toute vitesse $c \in [c_1, c_2]$.

Il ne reste qu'à montrer qu'un tel c est unique, ce qui revient à dire que $c_1 = c_2$ ci-dessus. Il "suffit" (cela repose sur des propriétés admises pour les systèmes nonlinéaires d'équations différentielles) de rappeler qu'il n'existe qu'une trajectoire qui converge vers $(0, 0)$, et d'utiliser comme ci-dessus des propriétés de monotonie en c . Supposons qu'il existe $c_1 > c_2$ telles que les trajectoires instables de $(1, 0)$, notées T_1 et T_2 , convergent vers $(0, 0)$.

D'une part, on peut montrer comme précédemment que T_1 se situe au-dessus de T_2 (modulo quand même quelques remarques géométriques, en particulier ces trajectoires ne traversent pas l'axe des abscisses). Mais comme on l'a dit, il n'existe qu'une trajectoire qui converge vers $(0, 0)$. Ainsi, T_1 doit être tangente à la droite

$$u' = \lambda_1 u$$

où

$$\lambda_1 = \frac{-c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4f'(0)}}{2}.$$

De même pour c_2 avec λ_2 défini de la même manière. On obtient une contradiction en remarquant que

$$\lambda_2 > \lambda_1.$$

Cela conclut cette (esquisse de) preuve. \blacksquare

Remark 4.3.5 *Dans le cas monostable, il existe une infinité de fronts, alors qu'il n'en existe qu'un dans le cas bistable (dans le théorème, on ne mentionne que l'unicité de la vitesse mais par construction, il est clair que le front est unique à translation près, car ils correspondent tous à la même trajectoire dans le plan de phase). Pour insister sur cette différence, on peut retirer la condition $U > 0$. Alors on remarque qu'il existe même des solutions qui connectent 0 à 1 pour toute vitesse dans le cas monostable : on ne retient que celles qui ne changent pas de signe.*

4.4 Vitesses de propagation de Cauchy

Terminons sur le théorème suivant, qui justifie l'intérêt des fronts et généralise le résultat sur les vitesses de propagation des solutions qu'on a énoncé plus haut dans le cas KPP.

Theorem 4.4.1 *Soit une donnée initiale $0 \leq u_0 < 1$ à support compact, et f du type monostable ou bistable, et supposons que la solution correspondante converge localement uniformément vers 1 quand $t \rightarrow +\infty$ (cf les théorèmes 4.1.1 et 4.1.5). Alors la solution se propage à la vitesse c^* dans le sens*

$$\forall 0 \leq c < c^*, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \leq ct} |u(t, x) - 1| = 0,$$

$$\forall c > c^*, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \max_{|x| \geq ct} |u(t, x)| = 0.$$

où c^* est définie dans le théorème précédent, selon le type de f .

Proof. On remarquera d'abord que le cas $c > c^*$ est facile puisqu'il suffit d'appliquer un principe de comparaison avec le front de vitesse c^* comme sur-solution. En fait, cette propriété reste vraie tant que u_0 est bornée, mais cela cause quelques difficultés techniques sur lesquelles on ne s'attardera pas ici (moralement, le supremum de la solution tend vers 1 quand $t \rightarrow +\infty$, on s'attend donc à ce que la situation ne soit pas si différente en fin de compte). C'est la convergence vers 1 pour des vitesses plus lentes qui est plus difficile, en particulier en dimension plus grande que 1. On se contentera de souligner que la preuve repose sur la construction de sous-solutions à support compact qui se déplacent à vitesse constante inférieure à c^* dans une direction donnée.

Considérons rapidement le cas de la dimension 1. On regarde de nouveau le plan de phase de

$$u'' + cu' + f(u) = 0.$$

Lorsque $c < c^*$, on sait par définition de c^* que la trajectoire qui part de $(1, 0)$ traverse l'axe des ordonnées, et par continuité c'est aussi le cas d'une trajectoire

qui part d'un point proche de $(1, 0)$. En fait, si on remonte cette trajectoire on peut également voir qu'elle traverse l'axe des ordonnées dans le demi plan $\{u' > 0\}$. Par conséquent, on peut tronquer la solution correspondante puis la prolonger par 0, ce qui nous donne en dimension 1 une sous-solution à support compact et de vitesse c . Grâce à la convergence localement uniforme vers 1, il est possible de placer ces sous-solutions sous la solution étudiée, et en déduire la propagation à vitesse c^* .

En dimension supérieure, on construit une sous-solution à symétrie radiale basée sur celle de la dimension 1, qu'ici nous noterons q pour la distinguer des solutions de l'équation posée dans \mathbb{R}^N . Nous supposons également que q atteint son max en 0, sans perte de généralités, et notons S la borne supérieure de son support. Alors

$$\underline{u}(t, x) = \begin{cases} q(0) & \text{si } |x| \leq R + (c - \varepsilon)t, \\ q(|x| - (c - \varepsilon)t) & \text{si } R + (c - \varepsilon)t \leq |x| \leq R + (c - \varepsilon)t + S, \\ 0 & \text{si } |x| \geq R + (c - \varepsilon)t + S. \end{cases}$$

est une sous-solution, dès lors que $\varepsilon > 0$ et $R > 0$ est choisi suffisamment grand. L'ajout d'un "plateau" sur lequel la sous-solution est constant permet de contrôler le terme indésirable $\frac{1}{r}\partial_r u$ dans le Laplacien radial de u . En contrepartie, ce plateau casse la régularité C^2 de \underline{u} dans son support : ce problème a déjà évoqué et nous nous contentons de remarquer que cette fonction peut être vue comme une sous-solution généralisée et que le principe de comparaison s'applique toujours. ■

Remark 4.4.2 *On a vu dans le résultat sur les fronts une différence de taille entre le cas monostable et le cas bistable. Dans le cas monostable, on peut construire des sous-solutions qui se propagent plus vite que c^* : il suffit pour cela de choisir des conditions initiales qui ne sont plus à support compact, comme on l'a fait pour le cas KPP. Selon la décroissance de la donnée initiale à l'infini, on peut sélectionner n'importe quelle vitesse plus grande que c^* : en fait, pour propager à une vitesse c , il "suffit" de choisir une donnée initiale qui a la même décroissance à l'infini que le front de vitesse c , cette décroissance pouvant être caractérisée.*

On peut comprendre qu'un tel phénomène ne se produit pas dans le cas bistable, d'une part parce que 0 est stable, d'autre part car c^ semble être l'unique vitesse raisonnable. Il s'avère qu'en effet, le théorème plus haut reste vrai tant que*

$$\liminf_{|x| \rightarrow +\infty} u_0(x) < \theta,$$

sans même que la donnée initiale n'ait besoin de décroître vers 0 à l'infini.